

Đề cương bài tập lớp KSTN K56

Môn Giải tích 3

I. Chuỗi

1. Xét sự hội tụ và tính tổng nếu có:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \sin na \quad (|q| < 1)$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \cos na \quad (|q| < 1)$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}$

2. Xét tính hội tụ của chuỗi:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1000^n}{n!}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$

h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+1/n}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln}}$

j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{n+1/2}}$

k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$

l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$

m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}]_{n \sqrt{}}$

n) $\sum_{n=1}^{+\infty} (n^{n^2+1} - 1)$

o) $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$

p) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!}$

$$q) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$$

$$s) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

$$u) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}$$

$$y) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$$

$$r) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}$$

$$t) \sum_{n=1}^{+\infty} (e - (1 + \frac{1}{n})^n)^p$$

$$x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$$

$$z) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$$

3. Xét tính hội tụ của chuỗi sau:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

$$g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

$$f) \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2})$$

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{\pi n}{4}$$

4. Xét tính hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p}$$

$$g) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$$

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} \sin n^2$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

$$f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n} + (-1)^{n-1})^p}$$

$$h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt[n]{n}}$$

$$k) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$$

5. Xác định miền hội tụ và miền hội tụ tuyệt đối của các chuỗi hàm sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{x^n} & \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \\ \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n & \text{d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n3^{2n}}{2n} x^n (1-x)^n \\ \text{e)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p} & \text{f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n \\ \text{g)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} & \text{h)} \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} \\ \text{i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}} \end{array}$$

6. Xét sự hội tụ đều của các chuỗi hàm sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \text{ trên tập } |x| < q < 1 & \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \text{ trên tập } |x| < 1 \\ \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \text{ trên tập } |x| \leq 1 & \text{d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ trên } (0; +\infty) \\ \text{e)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \text{ trên } 0 < x < +\infty & \\ \text{f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} \text{ trên } \mathbb{R} & \text{g)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2} \text{ trên } [0; +\infty) \\ \text{h)} \sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx} \text{ trên } [0; +\infty) & \text{i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{2x}{x^2 + n^2} \text{ trên } \mathbb{R} \\ \text{j)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} \text{ trên } [\varepsilon; 2\pi - \varepsilon] & \text{k)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} \text{ trên } [0; 2\pi] \\ \text{l)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \text{ trên } (0; +\infty) & \text{m)} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x} \text{ trên } (0; +\infty) \end{array}$$

7. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^p} & \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n \end{array}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a, b > 0)$$

$$f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1)$$

$$g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a > 0)$$

$$h) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$$

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$$

$$j) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \tan^n x$$

8. Tính tổng

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}, \quad |x| < 1$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n, \quad |x| < 1$$

$$f) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n, \quad |x| < 1$$

$$g) \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n, \quad |x| < 1$$

9. Phân tích thành chuỗi lũy thừa các hàm số sau:

$$a) e^{-x^2}$$

$$b) \cos^2 x$$

$$c) \frac{x^{10}}{1-x}$$

$$d) \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$$

$$e) \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$f) \frac{1}{1+x+x^2}$$

$$g) \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$$

$$h)^* \arctan x$$

$$i)^* \arcsin x$$

$$k)^* \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

(* HD: sử dụng đạo hàm)

10. Khai triển thành chuỗi Fourier các hàm số sau trên các đoạn đã cho:

$$a) f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l \\ 0, & l < x < 2l \end{cases} \text{ trên } (0, 2l)$$

b) $f(x) = x$ trên $(-\pi, \pi)$

c) $f(x) = |x|$ trên $(-\pi, \pi)$

d) $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x < 0 \\ bx, & 0 < x < \pi \end{cases}$ trên $(-\pi, \pi)$

e) $f(x) = x$ trên $(a, a + 2l)$

f) $f(x) = x \sin x$ trên $(-\pi, \pi)$