BÀI TẬP THAM KHẢO ĐẠI SỐ

Nhóm ngành 3 Mã số: MI 1143

Chương I. Tập hợp - Logic - Ánh xạ - Số phức

Bài 1. Lập bảng giá trị chân lý của các biểu thức mệnh đề sau

a) $[A \wedge (B \vee C)] \to C$

b) $[\overline{A} \wedge (B \vee C)] \wedge B$

Bài 2. (CK 20152) Cho p, q là các mệnh đề. Hai mệnh đề $(p \to q) \to q$ và $p \vee q$ có tương đương logic không? Vì sao?

Bài 3. Chứng minh rằng:

a) $A \leftrightarrow B$ và $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ là tương đương logic.

b) $(A \to B) \to C$ và $A \to (B \to C)$ không tương đương logic.

Bài 4. (GK 20171). Cho các mệnh đề A, B và C thỏa mãn $(A \wedge C) \to (B \wedge C)$ và $(A \vee C) \to (B \vee C)$ là các mệnh đề đúng. Chứng minh rằng $A \to B$ là mệnh đề đúng.

Bài 5. Cho biết mệnh đề "Nếu 2020 là số lẻ thì nó chia hết cho 3" là đúng hay sai? Vì sao ?

Bài 6. Cho $f(x), g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Kí hiệu $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$. Biểu diễn tập nghiệm phương trình sau qua A, B:

a) $f(x)g(x) = 0$

b) $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$

Bài 7. (GK20141). Cho các tập hợp $A = [3; 6), B = (1; 5), C = [2; 4]$. Xác định tập hợp $(A \cap B) \backslash C$.

Bài 8. (CK 20151). Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh: $[(A \cup B) \backslash C] \subset [(A \backslash B) \cup (B \backslash C)]$.

Bài 9. (CK 20142). Cho các tập hợp A, B, C, D bất kỳ. Chứng minh:

$$[(A \cup B) \backslash (C \cup D)] \subset [(A \backslash C) \cup (B \backslash D)].$$

Đưa ra ví dụ để cho thấy hai vế của bao hàm tập hợp trên có thể không bằng nhau.

Bài 10. Cho A, B, C, D là các tập hợp bất kì, chứng minh:

a) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$.

b) $A \cup (B \backslash A) = A \cup B$.

c) $(A \backslash B) \cap (C \backslash D) = (A \cap C) \backslash (B \cup D)$.
(GK 20151)

Bài 11. Cho hai ánh xạ

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$
$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

a) Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh. Tìm $g(\mathbb{R})$.

b) Xác định ánh xạ $h = g \circ f$.

Bài 12. Chứng minh các tính chất của ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ $f : X \to Y$:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B); A, B \subset X$.

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B); A, B \subset X$. Nêu ví dụ chứng tỏ điều ngược lại không đúng.

c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B); A, B \subset Y$.

d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B); A, B \subset Y$.

e) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B); A, B \subset Y$.

Bài 13. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = x^2 + 4x - 5, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

và $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$. Xác định các tập hợp $f(A), f^{-1}(A)$.

Bài 14. (CK 20161). Cho ánh xạ

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$$

và tập $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}$. Xác định các tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(A)$.

Bài 15. (GK 20171). Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, xác định bởi $f(x; y) = (x^2 - y; x + y)$. Ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

Bài 16. Viết các số phức sau dưới dạng chính tắc:

a) $(1 + i\sqrt{3})^9$. b) $\sqrt[8]{1 - i\sqrt{3}}$. c) $(2 + i\sqrt{12})^5(\sqrt{3} - i)^{11}$.

Bài 17. Tìm các căn bậc 8 của số phức $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Bài 18. Tìm nghiệm phức của phương trình sau:

a) $z^2 + z + 1 = 0$.

b) $z^2 + 2iz - 5 = 0$.

c) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$.

d) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$.

e) $\overline{z^7} = \dfrac{1024}{z^3}$.

f) $z^8(\sqrt{3} + i) = 1 - i$.

g) $iz^2 - (1 + 8i)z + 7 + 17i = 0(GK20171)$.

Bài 19. (GK 20141). Cho $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2014}$ là các căn bậc 2014 phân biệt phức của đơn vị 1. Tính $A = \sum_{i=1}^{2014} \varepsilon_i^2$.

Bài 20. (CK 20161). Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = iz^2 + (4 - i)z - 9i$, với i là đơn vị ảo. Xác định $f^{-1}(\{7\})$.

Bài 21. (GK 20171). Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + ai = 0$, với a là một số thực và i là đơn vị ảo. Tìm a biết $|z_1^2 - z_2^2| = 1$.

Chương II. Ma trận - Định thức - Hệ phương trình

Bài 22. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trong các phép toán sau, phép toán nào thực hiện được. Nếu phép toán nào thực hiện được, hãy tính kết quả của phép toán đó: $AB; AC; CA; A + B; B - C; (AB)C; A(BC); (A^T + 3B)C$.

Bài 23. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ và đa thức $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Tính $f(A)$.

Bài 24. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thoả mãn:

a) $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 25. a) Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thoả mãn phương trình sau:

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0.$$

b) Chứng minh với A là ma trận vuông cấp 2 thì $A^k = 0, (k > 2) \Leftrightarrow A^2 = 0$.

Bài 26. Không khai triển định thức mà dùng các tính chất của định thức để chứng minh:

a) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

Bài 27. Tính các định thức sau:

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}$

b) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$

Bài 28. a) Chứng minh nếu A là ma trận phản xứng cấp n lẻ thì $\det(A) = 0$.

b) Cho A là ma trận vuông cấp 2019. Chứng minh $\det\left(A - A^T\right) = 0$.

Bài 29. Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

Bài 30. (GK 20141). Tìm m để hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & m \end{bmatrix}$ bằng 2.

Bài 31. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 32. (GK 20151). Tìm a để ma trận $A = \begin{bmatrix} a+1 & -1 & a \\ 3 & a+1 & 3 \\ a-1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$ khả nghịch.

Bài 33. Chứng minh rằng ma trận A vuông cấp n thoả mãn

$$a_k A^k + a_{k-1}\ A^{k-1} + \cdots + a_1\ A + a_0 E = 0, (a_0 \neq 0)$$

thì A là ma trận khả nghịch.

Bài 34. (CK 20152). Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ và E là ma trận đơn vị cấp 2 .

a) Tính $F = A^2 - 3A$.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn $(A^2 + 5E)\, X = B^T\, (3A - A^2)$.

Bài 35. Cho $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & 12 & 10 \\ 6 & 16 & 7 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $AX + B = C^T$.

Bài 36. Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ 10x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

Bài 37. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

a) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 12 \\ 2x + 5y - z + 11t = 49 \\ 3x + 6y - 4z + 13t = 49 \\ x + 2y - 2z + 9t = 33 \end{cases}$ (GK 20171)

b) $\begin{cases} x & +2y & +3z & +4t & = -4 \\ 3x & +7y & +10z & +11t & = -11 \\ x & +2y & +4z & +2t & = -3 \\ x & +2y & +2z & +7t & = -6 \end{cases}$ (GK 20151)

Bài 38. (GK 20171). Tìm a để hệ $\begin{cases} (a+5)x & +3y & +(2a+1)z & = 0 \\ ax & +(a-1)y & +4z & = 0 \\ (a+5)x & +(a+2)y & +5z & = 0 \end{cases}$ có nghiệm không tầm thường.

Bài 39. (CK 20172). Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx_1 & +2x_2 & -x_3 & = 3 \\ x_1 & +mx_2 & +2x_3 & = 4 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = -m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Bài 40. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +mx_4 & = 4 \\ -x_1 & -x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = k \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & +(m-1)x_4 & = 3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +2mx_4 & = 5 \end{cases}$.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2, k = 5$.

b) Tìm điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất.

c) Tìm điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Chương III. Không gian vectơ

Một vài ký hiệu sử dụng trong Chương 3:

- Không gian $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}\}$.

- Không gian đa thức có bậc không vượt quá n:

$$P_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0, n}\}.$$

- $M_{m\times n}$ là tập các ma trận kích thước $m \times n$. Đặc biệt, M_n là tập các ma trận vuông cấp n.

- Cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^n$ là $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, ở đó

$$e_1 = (1; 0; \ldots; 0; 0), e_n = (0; 1; 0; \ldots; 0), \ldots, e_n = (0; 0; \ldots; 0; 1), \forall i = \overline{1, n}$$

- Cơ sở chính tắc của $P_n[x]$ là $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ với $e_1 = 1; e_2 = x; \ldots; e_{n+1} = x^n$.

Bài 41. Chứng minh các tập hợp con của các không gian vectơ quen thuộc sau là các không gian vectơ con của chúng:

a) Tập $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0\}$ trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.

b) Tập các đa thức có hệ số bậc nhất bằng 0 (hệ số của x) của không gian vectơ $P_n[x]$.

c) Tập các ma trận tam giác trên của không gian vectơ M_n.

d) Tập các ma trận đối xứng của không gian vectơ M_n.

e) Tập các ma trận phản xứng của không gian vectơ M_n.

Bài 42. Cho $V_1,\ V_2$ là hai không gian vectơ con của KGVT V. Chứng minh:

a) $V_1 \cap V_2$ là KGVT con của V.

b) $V_1 + V_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$ là KGVT con của V.

Bài 43. Cho V_1, V_2 là hai không gian vectơ con của KGVT V. Ta nói V_1, V_2 là bù nhau nếu $V_1 + V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \{\emptyset\}$. Chứng minh rằng $V_1,\ V_2$ bù nhau khi và chỉ khi mọi vectơ u của V có biểu diễn duy nhất dưới dạng $u = u_1 + u_2, (u_1 \in V_1, u_2 \in V_2)$.

Bài 44. Trong $\mathbb{R}^3$ xét xem các hệ vectơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $v_1 = (4; -2; 6), v_2 = (-6; 3; -9)$.

b) $v_1 = (2; 3; -1), v_2 = (3; -1; 5), v_3 = (-1; 3; -4)$.

c) $v_1 = (1; 2; 3), v_2 = (3; 6; 7), v_3 = (-3; 1; 3), v_4 = (0; 4; 2)$.

Bài 45. Trong không gian $P_2[x]$, xét xem hệ vectơ $\mathcal{B} = \{u_1 = 1 + 2x, u_2 = 3x - x^2, u_3 = 2 - x + x^2\}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính

Bài 46. Trong $\mathbb{R}^3$, chứng minh $v_1 = (1; 1; 1), v_2 = (1; 1; 2), v_3 = (1; 2; 3)$ lập thành một cơ sở. Xác định ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở trên và tìm toạ độ của $x = (6; 9; 14)$ đối với cơ sở trên theo hai cách trực tiếp và dùng công thức đổi tọa độ.

Bài 47. Trong các trường hợp sau, chứng minh $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm $[v]_{\mathcal{B}}$ biết rằng:

a) $v_1 = (2; 1; 1), v_2 = (6; 2; 0),$
$v_3 = (7; 0; 7), v = (15; 3; 1).$

b) $v_1 = (0; 1; 1), v_2 = (2; 3; 0),$
$v_3 = (1; 0; 1), v = (2; 3; 0).$

Bài 48. Trong $P_3[x]$ cho các vectơ $v_1 = 1, v_2 = 1 + x, v_3 = x + x^2, v_4 = x^2 + x^3$.

a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là một cơ sở của $P_3[x]$.

b) Tìm toạ độ của vectơ $v = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$ đối với cơ sở trên.

c) Tìm toạ độ của vectơ $v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ đối với cơ sở trên.

Bài 49. Tìm cơ sở và số chiều của KGVT sinh bởi hệ vectơ sau:

a) $v_1 = (2; 1; 3; 4), v_2 = (1; 2; 0; 1), v_3 = (-1; 1; -3; 0)$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $v_1 = (2; 0; 1; 3; -1), v_2 = (1; 1; 0; -1; 1), v_3 = (0; -2; 1; 5; -3), v_4 = (1; -3; 2; 9; -5)$ trong $\mathbb{R}^5$.

Bài 50. Cho KGVT $P_3[x]$ và hệ vectơ

$$v_1 = 1 + x^2 + x^3, v_2 = x - x^2 + 2x^3, v_3 = 2 + x + 3x^3, v_4 = -1 + x - x^2 + 2x^3.$$

a) Tìm hạng của hệ vectơ.

b) Tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Bài 51. (CK 20151). Trong $\mathbb{R}^4$, cho các vectơ

$$u_1 = (1; 3; -2; 1), u_2 = (-2; 3; 1; 1), u_3 = (2; 1; 0; 1), u = (1; -1; -3; m).$$

Tìm m để $u \in \operatorname{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

Bài 52. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất sau:

a) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Bài 53. Cho $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là hệ sinh của W_1, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là hệ sinh của W_2, với W_1, W_2 là các không gian con của KGVT V. Chứng minh $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_n\}$ là hệ sinh của $W_1 + W_2$.

Bài 54. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ :

$$v_1 = (1; 0; 1; 0), v_2 = (0; 1; -1; 1), v_3 = (1; 1; 1; 2), v_4 = (0; 0; 1; 1).$$

Đặt $V_1 = \text{Span}\{v_1, v_2\}, V_2 = \text{Span}\{v_3, v_4\}$. Tìm cơ sở và số chiều của các KGVT $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

Bài 55. Cho U, V là các không gian hữu hạn chiều. Chứng minh

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

Chương IV. Ánh xạ tuyến tính

Bài 56. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_3).$$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.

c) Tìm một cơ sở của $\ker f$.

Bài 57. Cho ánh xạ $f : P_2[x] \to P_4[x]$ xác định như sau: $f(p) = p + x^2 p, \forall p \in P_2[x]$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc $E_1 = \{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $P_4[x]$.

c) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở $E_1' = \{1 + x, 2x, 1 + x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $P_4[x]$.

Bài 58. (CK 20151). Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn:

$$f(1 - x^2) = -3 + 3x - 6x^2, f(3x + 2x^2) = 17 + x + 16x^2, f(2 + 6x + 3x^2) = 32 + 7x + 25x^2.$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f(1 + x^2)$.

b) Xác định m để vectơ $v = 1 + x + mx^2$ thuộc $\text{Im} f$.

Bài 59. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ đối với cơ sở $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ trong đó: $v_1 = 3x + 3x^2, v_2 = -1 + 3x + 2x^2, v_3 = 3 + 7x + 2x^2$.

a) Tìm $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$.

b) Tìm $f(1 + x^2)$.

Bài 60. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3).$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{B} = \{v_1 = (1; 0; 0), v_2 = (1; 1; 0), v_3 = (1; 1; 1)\}$.

Bài 61. Cho toán tử tuyến tính trên $P_2[x]$ xác định bởi:

$$f(1 + 2x) = -19 + 12x + 2x^2; f(2 + x) = -14 + 9x + x^2; f\left(x^2\right) = 4 - 2x - 2x^2.$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ và tìm $\text{rank}(f)$.

Bài 62. (CK 20151). Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn:

$$f\left(1 - x^2\right) = -3 + 3x - 6x^2, f\left(3x + 2x^2\right) = 17 + x + 16x^2, f\left(2 + 6x + 3x^2\right) = 32 + 7x + 25x^2.$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f(1 + x^2)$.

b) Xác định m để vectơ $v = 1 + x + mx^2$ thuộc $\text{Im} f$.

Bài 63. Cho V, V' là 2 KGVT n chiều và $f : V \to V'$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh các khẳng định sau tương đương:

a) f là đơn ánh.

b) f là toàn ánh.

c) f là song ánh.

Bài 64. (CK 20141). Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 + x_2 - x_3; mx_1 - x_2 + x_3),$$

với m là tham số. Xác định ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và tìm m để f là một toàn ánh.

Bài 65. Tìm các giá trị riêng và cơ sở không gian riêng của các ma trận:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$

Bài 66. Cho biến đổi tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ xác định như sau:

$$f\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)\,x + (a_0 - 2a_2)\,x^2.$$

a) Tìm các trị riêng của f.

b) Tìm các vectơ riêng ứng với các trị riêng tìm được.

Bài 67. Tìm ma trận P làm chéo hóa A và xác định $P^{-1}AP$ khi đó với:

a) $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Vận dụng tính A^n

Bài 68. Ma trận A có đồng dạng với ma trận chéo không? Nếu có, tìm ma trận chéo đó:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 69. Tìm cở sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có dạng chéo trong đó

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$.

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_2, -x_1 + x_2 + 2x_3)$.

Bài 70. (CK 20172). Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi :

$$f(1;2;-1) = (4;-2;-6), f(1;1;2) = (5;5;0), f(1;0;0) = (1;2;1).$$

a) Tìm m để $u = (6;-3;m) \in \mathrm{Im}(f)$.

b) Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của f.

Bài 71. (CK 20161). Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -10 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.

a) Tính $f(1 + x + x^2)$. Tìm m để $v = 1 - x + mx^2$ thuộc $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo.

Bài 72. Cho A là ma trận kích thước $m \times n, B$ là ma trận kích thước $n \times p$. Chứng minh

$$\mathrm{rank}(AB) \le \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\},$$

với $\mathrm{rank}(A) =$ hạng của ma trận A.

Chương V. Không gian Euclide

Bài 73. Giả sử V là KGVT n chiều với cơ sở $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Với u, v là các vectơ của V ta có $u = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n; v = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n$. Đặt

$$< u, v >= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

a) Chứng minh $< u, v >$ là một tích vô hướng trên V.

b) Áp dụng cho trường hợp $V = \mathbb{R}^3$, với $e_1 = (1;0;1), e_2 = (1;1;-1), e_3 = (0;1;1), u = (2;-1;-2), v = (2;0;5)$. Tính $< u, v >$.

c) Áp dụng cho trường hợp $V = P_2[x]$, với $\mathcal{B} = \{1; x; x^2\}, u = 2 + 3x^2, v = 6 - 3x - 3x^2$. Tính $< u, v >$.

d) Áp dụng cho trường hợp $V = P_2[x]$, với $B = \{1 + x; 2x; x - x^2\}, u = 2 + 3x^2, v = 6 - 3x - 3x^2$. Tính $< u, v >$.

Bài 74. Xét không gian $P_3[x]$. Kiểm tra các dạng $< p, q >$ sau có phải là tích vô hướng hay không?

a) $< p, q >=$ p $(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

b) $< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.

c) $< p, q >= \int_{-1}^{1}$ p $(x)q(x)dx$.

Trong trường hợp là tích vô hướng tính $< p, q >$ với $p = 2 - 3x + 5x^2 - x^3 \cdot q = 4 + x - 3x^2 + 2x^3$.

Bài 75. Cho cơ sở $B = \{(1; 1; -2), (2; 0; 1), (1; 2; 3)\}$ trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc. Trực giao hóa Gram-Schmidt cơ sở B để thu được cơ sở trực chuẩn B' và tìm tọa độ của vectơ $u = (5; 8; 6)$ đối với cơ sở B'.

Bài 76. Tìm hình chiếu trực giao của vectơ u lên không gian sinh bởi vectơ v:

a) $u = (1; 3; -2; 4), v = (2; -2; 4; 5)$.

b) $u = (4; 1; 2; 3; -3), v = (-1; -2; 5; 1; 4)$.

Bài 77. Cho không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc và các vectơ

$$u = (3; -2; 1), v_1 = (2; 2; 1), v_2 = (2; 5; 4).$$

Đặt $W = \text{Span}\{v_1, v_2\}$. Xác định hình chiếu trực giao của vectơ u lên không gian W.

Bài 78. (CK 20161). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho các vectơ

$$u = (1; 2; -1), v = (3; 6; 3)$$

và đặt $H = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w \perp u\}$.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H.

b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H.

Bài 79. Cho $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc. Cho $u_1 = (6; 3; -3; 6), u_2 = (5; 1; -3; 1)$. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian sinh bởi $\{u_1, u_2\}$.

Bài 80. Trong $P_2[x]$ định nghĩa tích vô hướng $< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ với $p, q \in P_2[x]$.

a) Trực chuẩn hoá Gram - Schmidt cơ sở $\mathcal{B} = \{1; x; x^2\}$ để nhận được cơ sở trực chuẩn A.

b) Tìm $[r]_A$ biết $r = 2 - 3x + 3x^2$.

Bài 81. Trong $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các vectơ

$$v_1 = (1;1;0;0;0), v_2 = (0;1;-1;2;1), v_3 = (2;3;-1;2;1).$$

Gọi $V = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x \perp v_i, i = 1;2;3\}$

a) Chứng minh V là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^5$.

b) Tìm $\dim V$.

Bài 82. Chéo hoá trực giao các ma trận sau

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Bài 83. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$.

b) $7x_1^2 - 7x_2^2 + 48x_1x_2$.

c) $7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

d) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 4x_3x_1$.

Bài 84. Cho $Q(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$. Tìm

$$\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=16}{\text{Max}} Q(x_1, x_2, x_3), \underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=16}{\text{Min}} Q(x_1, x_2, x_3).$$

Với giá trị nào thì $Q(x_1, x_2, x_3)$ đạt max, min.