Đại học Bách Khoa Hà Nội Viện Toán ứng dụng và Tin học

BÀI TẬP THAM KHẢO ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Nhóm ngành 2 Mã số: MI 1142

Chương 1

Tập hợp - Ánh xạ - Số phức

Bài 1. Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Kí hiệu $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$. Biểu diễn tập nghiệm của các phương trình sau qua $A,\ B$:

a) $f(x)g(x) = 0$

b) $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$.

Bài 2. (GK20141) Cho các tập hợp $A = [3; 6), B = (1; 5), C = [2; 4]$. Xác định tập hợp $(A \cap B)\backslash C$.

Bài 3. Cho các tập hợp $A = \{1; 2; 3\}, B = \{2; 4; 6\}, C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Xác định tập hợp $[(A\backslash B) \cap (B\backslash C)] \cup (C\backslash A)$.

Bài 4. (CK 20151) Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh

$$[(A \cup B)\backslash C] \subset [(A\backslash B) \cup (B\backslash C)].$$

Bài 5. (CK 20142) Cho các tập hợp A, B, C, D bất kỳ. Chứng minh

$$[(A \cup B)\backslash(C \cup D)] \subset [(A\backslash C) \cup (B\backslash D)].$$

Đưa ra ví dụ để cho thấy hai vế của bao hàm tập hợp trên có thể không bằng nhau.

Bài 6. Cho A, B, C, D là các tập hợp bất kì, chứng minh:

a) $A \cap (B\backslash C) = (A \cap B)\backslash(A \cap C)$

b) $A \cup (B\backslash A) = A \cup B$

c) $(A\backslash B) \cap (C\backslash D) = (A \cap C)\backslash(B \cup D)$ (**GK20151**).

Bài 7. Cho hai ánh xạ $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

a) Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh. Tìm $g(\mathbb{R})$.

b) Xác định ánh xạ $h = g \circ f$.

Bài 8. Chứng minh các tính chất của ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ $f : X \to Y$

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \forall A, B \subset X$.

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subset X$. Nêu ví dụ chứng tỏ điều ngược lại không đúng.

c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \forall A, B \subset Y$

d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \quad \forall A, B \subset Y$

e) $f^{-1}(A \backslash B) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B) \quad \forall A, B \subset Y$

f) Chứng minh f là đơn ánh khi và chỉ khi $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subset X$.

Bài 9. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 4x - 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, và $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 3\}$. Xác định các tập hợp $f(A), f^{-1}(A)$.

Bài 10. (CK 20161) Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$ và tập $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}$. Xác định các tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(A)$.

Bài 11. (GK 20171) Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, xác định bởi $f(x; y) = (x^2 - y; x + y)$. Ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

Bài 12. Viết các số phức sau dưới dạng chính tắc:

a) $(1 + i\sqrt{3})^9$ b) $\frac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}}$ c) $(2 + i\sqrt{12})^5(\sqrt{3} - i)^{11}$.

Bài 13. Khai căn bậc 8 của số phức $1 - i\sqrt{3}$.

Bài 14. Tìm nghiệm phức của phương trình sau:

a) $z^2 + z + 1 = 0$ b) $\mathrm{z}^2 + 2\mathrm{iz} - 5 = 0$ c) $\mathrm{z}^4 - 3\mathrm{iz}^2 + 4 = 0$ d) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$

e) $\overline{z^7} = \frac{1024}{z^3}$ f) $z^8(\sqrt{3} + i) = 1 - i$ g) $iz^2 - (1 + 8i)z + 7 + 17i = 0$ (**GK20171**).

Bài 15. (GK20141) Cho $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{2014}$ là các căn bậc 2014 phân biệt phức của đơn vị 1. Tính $A = \sum_{i=1}^{2014} \epsilon_i^2$.

Bài 16. Cho phương trình $\frac{(x+1)^9 - 1}{x} = 0$.

a) Tìm các nghiệm của phương trình trên.

b) Tính môđun của các nghiệm.

c) Tính tích của các nghiệm từ đó tính $\prod_{k=1}^{8} \sin \frac{k\pi}{9}$.

Bài 17. (CK 20161) Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = iz^2 + (4 - i)z - 9i$, với $\boldsymbol{i}$ là đơn vị ảo. Xác định $\boldsymbol{f}^{-1}(\{7\})$.

Bài 18. (GK20171) Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + ai = 0$, với a là một số thực và i là đơn vị ảo. Tìm a biết $|z_1^2 - z_2^2| = 1$.

Chương 2

Ma trận - Định thức - Hệ phương trình

Bài 19. Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Phép tính nào sau đây thực hiện được: $A + C$, $B(A + C^T)$, $C^T B$? Hãy thực hiện phép tính đó.

Bài 20. (CK 20152) Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ và E là ma trận đơn vị cấp 2.

a) Tính $F = A^2 - \mathbf{3}A$.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn $(A^2 + 5E)\,X = B^T\,(3A - A^2)$.

Bài 21. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ và đa thức $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Tính $f(A)$.

Bài 22. a) Cho $A = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$. Tính A^n. b) Cho $B = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$. Tính B^n.

Bài 23. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thoả mãn:

a) $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 24. a) Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thoả mãn phương trình sau: $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$.

b) Chứng minh với A là ma trận vuông cấp 2 thì $A^k = 0, (k > 2) \Leftrightarrow A^2 = 0$.

Bài 25. Không khai triển định thức mà dùng các tính chất của định thức để chứng minh:

a) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

Bài 26. Tính các định thức sau:

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ b) $B = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & a^2+c^2 \end{vmatrix}$ c) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

Bài 27. a) Chứng minh nếu A là ma trận phản xứng cấp n lẻ thì $\det(A) = 0$.

b) Cho A là ma trận vuông cấp 20123. Chứng minh $\det\left(A - A^{\mathrm{T}}\right) = 0$.

Bài 28. Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$.

Bài 29. (GK20141) Tìm m để hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & m \end{bmatrix}$ bằng 2 .

Bài 30. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 31. Giải phương trình ma trận $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Bài 32. (GK20151) Tìm a để ma trận $A = \begin{bmatrix} a+1 & -1 & a \\ 3 & a+1 & 3 \\ a-1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$ khả nghịch.

Bài 33. Chứng minh rằng ma trận A vuông cấp n thoả mãn $a_kA^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1A + a_0E = 0, (a_0 \neq 0)$ thì A là ma trận khả nghịch.

Bài 34. Cho $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 12 & 10 \\ 6 & 16 & 7 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $AX + B = C^T$.

Bài 35. Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ 10x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

Bài 36. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

a) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 12 \\ 2x + 5y - z + 11t = 49 \\ 3x + 6y - 4z + 13t = 49 \\ x + 2y - 2z + 9t = 33 \end{cases}$ **(GK20171)** b) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = -4 \\ 3x + 7y + 10z + 11t = -11 \\ x + 2y + 4z + 2t = -3 \\ x + 2y + 2z + 7t = -6 \end{cases}$ **(GK20151)**

Bài 37. (GK20171) Tìm a để hệ $\begin{cases} (a+5)x + 3y + (2a+1)z = 0 \\ ax + (a-1)y + 4z = 0 \\ (a+5)x + (a+2)y + 5z = 0 \end{cases}$ có nghiệm không tầm thường.

Bài 38. (CK 20172) Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Bài 39. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + mx_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = k \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + (m-1)x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2mx_4 = 5. \end{cases}$.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2, k = 5$.

b) Tìm điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất.

c) Tìm điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Chương 3

Không gian véc tơ

Một vài ký hiệu sử dụng trong Chương 3**:**

- Không gian $\mathbb{R}^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}\}$.
- Không gian đa thức có bậc không vượt quá n:

$$\mathrm{P}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0, n}\}.$$

- $M_{m\times n}$ là tập các ma trận kích thước $m \times n$. Đặc biệt, M_n là tập các ma trận vuông cấp n.
- Cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^n$ là $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, ở đó

$$e_1 = (1; 0; \ldots; 0; 0), e_n = (0; 1; 0; \ldots; 0), \ldots, e_n = (0; 0; \ldots; 0; 1), \forall i = \overline{1, n}$$

- Cơ sở chính tắc của $\mathrm{P}_n[x]$ là $E = \{e_1; e_2, \ldots; e_{n+1}\}$ với $e_1 = 1; e_2 = x; \ldots; e_{n+1} = x^n$.

Bài 40. Tập V với các phép toán có phải là không gian véc tơ không?

a) $v = \{(x, y, \mathrm{z}) \mid x, y, \mathrm{z} \in \mathbb{R}\}$ với các phép toán xác định như sau

$$(x, y, \mathrm{z}) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$
$$k(x, y, z) = (|k|x, |k|y, |k|z)$$

b) $V = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ với các phép toán xác định như sau:
$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$ và $k\left(x_1, x_2\right) = \left(x_1^k, x_2^k\right)$ trong đó k là số thực bất kỳ

Bài 41. Chứng minh các tập hợp con của các không gian véc tơ quen thuộc sau là các không gian véc tơ con của chúng:

a) Tập $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0\}$.

b) Tập các đa thức có hệ số bậc nhất bằng 0 (hệ số của x) của KGVT $\mathrm{P_n}[x]$.

c) Tập các ma trận tam giác trên của tập các ma trận vuông cấp n.

d) Tập các ma trận đối xứng của tập các ma trận vuông cấp n.

e) Tập các ma trận phản xứng của tập các ma trận vuông cấp $n\,(a_{\mathrm{ij}} = -a_{\mathrm{ji}})$.

Bài 42. Cho $V_1,\ V_2$ là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Chứng minh:

a) $V_1 \cap V_2$ là $KGVT$ con của V.

b) Cho $V_1 + V_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$. Chứng minh $V_1 + V_2$ là KGVT con của V.

c) Cho $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ là hệ sinh của $V_1, \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của V_2. Chứng minh $\{v_1, \cdots, v_m, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của $V_1 + V_2$.

Bài 43. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Ta nói V_1, V_2 là bù nhau nếu $v_1 + v_2 = v, v_1 \cap v_2 = \{\theta\}$. Chứng minh rằng v_1, v_2 bù nhau khi và chỉ khi mọi véc tơ u của v có biểu diễn duy nhất dưới dạng $u = u_1 + u_2, (u_1 \in v_1, u_2 \in v_2)$.

Bài 44. Trong KGVT V, cho hệ véc tơ $\{u_1, u_2, \cdots, u_{\mathrm{n}}, u_{\mathrm{n+1}}\}$ là phụ thuộc tuyến tính và $\{u_1, u_2, \cdots, u_{\mathrm{n}}\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Chứng minh $u_{\mathrm{n+1}}$ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, u_2, \cdots, u_{\mathrm{n}}$.

Bài 45. Trong $\mathbb{R}^3$ xét xem các hệ véc tơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $v_1 = (4; -2; 6), v_2 = (-6; 3; -9)$.

b) $v_1 = (2; 3; -1), v_2 = (3; -1; 5), v_3 = (-1; 3; -4)$.

c) $v_1 = (1; 2; 3), v_2 = (3; 6; 7), v_3 = (-3; 1; 3), v_4 = (0; 4; 2)$.

Bài 46. Trong không gian $\mathrm{P}_2[x]$, xét xem hệ véc tơ $B = \{u_1 = 1 + 2x, u_2 = 3x - x^2, u_3 = 2 - x + x^2\}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

Bài 47. Trong $\mathbb{R}^3$, chứng minh $v_1 = (1; 1; 1), v_2 = (1; 1; 2), v_3 = (1; 2; 3)$ lập thành một cơ sở. Xác định ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở trên và tìm toạ độ của $x = (6; 9; 14)$ đối với cơ sở trên theo hai cách trực tiếp và dùng công thức đổi tọa độ.

Bài 48. Trong các trường hợp sau, chứng minh $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm $[v]_B$ biết rằng:

a) $v_1 = (2; 1; 1), v_2 = (6; 2; 0), v_3 = (7; 0; 7), v = (15; 3; 1)$.

b) $v_1 = (0; 1; 1), v_2 = (2; 3; 0), v_3 = (1; 0; 1), v = (2; 3; 0)$.

Bài 49. Tìm cơ sở và số chiều của KGVT sinh bởi hệ véc tơ sau:

a) $v_1 = (2; 1; 3; 4), v_2 = (1; 2; 0; 1), v_3 = (-1; 1; -3; 0)$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $v_1 = (2; 0; 1; 3; -1), v_2 = (1; 1; 0; -1; 1), v_3 = (0; -2; 1; 5; -3), v_4 = (1; -3; 2; 9; -5)$ trong $\mathbb{R}^5$.

Bài 50. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ : $v_1 = (1;0;1;0), v_2 = (0;1;-1;1), v_3 = (1;1;1;2), v_4 = (0;0;1;1)$. Đặt $V_1 = \text{span}\{v_1, v_2\}, V_2 = \text{span}\{v_3, v_4\}$. Tìm cơ sở và số chiều của các KGVT $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

Bài 51. (CK 20151) Trong $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ $u_1 = (1;3;-2;1), u_2 = (-2;3;1;1), u_3 = (2;1;0;1), u = (1;-1;-3;m)$. Tìm m để $u \in \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

Bài 52. Trong $\text{P}_3[x]$ cho các véc tơ $v_1 = 1, v_2 = 1 + x, v_3 = x + x^2, v_4 = x^2 + x^3$.

a) Chứng minh $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là một cơ sở của $\text{P}_3[x]$.

b) Tìm toạ độ của véc tơ $v = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$ đối với cơ sở trên.

c) Tìm tọa độ của véc tơ $v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ đối với cơ sở trên.

Bài 53. (CK 20151) Cho không gian $\text{P}_{2015}[x]$ - các đa thức bậc không quá 2015 và tập $W_1 = \{p \in \text{P}_{2015}[x] \mid p(-x) = p(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$. Chứng minh rằng W_1 là không gian con của $\text{P}_{2015}[x]$. Chỉ ra số chiều và một cơ sở của W_1 (không cần chứng minh).

Bài 54. Cho KGVT $\text{P}_3[x]$ và hệ véc tơ $v_1 = 1 + x^2 + x^3, v_2 = x - x^2 + 2x^3, v_1 = 2 + x + 3x^3$, $v_4 = -1 + x - x^2 + 2x^3$.

a) Tìm hạng của hệ véc tơ. b) Tìm một cơ sở của không gian $\text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Bài 55. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

Bài 56. Cho U, V là các không gian hữu hạn chiều. Chứng minh

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

Chương 4

Ánh xạ tuyến tính

Bài 57. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(3x_1+x_2-x_3,2x_1+x_3\right)$.

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.

c) Tìm một cơ sở của $\mathrm{Ker}f$.

Bài 58. Cho ánh xạ $f:\mathrm{P}_2[x]\to\mathrm{P}_4[x]$ xác định như sau: $f(p)=p+x^2p,\forall p\in\mathrm{P}_2[x]$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc $\mathrm{E}_1=\{1,x,x^2\}$ của $\mathrm{P}_2[x]$ và $\mathrm{E}_2=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ của $\mathrm{P}_4[x]$

c) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở $E_1{}'=\{1+x,2x,1+x^2\}$ của $\mathrm{P}_2[x]$ và $E_2=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ của $\mathrm{P}_4[x]$

Bài 59. (CK 20151) Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathrm{P}_2[x]\to\mathrm{P}_2[x]$ thỏa mãn:

$f\left(1-x^2\right)=-3+3x-6x^2,f\left(3x+2x^2\right)=17+x+16x^2,f\left(2+6x+3x^2\right)=32+7x+25x^2$.

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathrm{P}_2[x]$. Tính $f\left(1+x^2\right)$.

b) Xác định m để véc tơ $v=1+x+mx^2$ thuộc $\mathrm{Im}f$.

Bài 60. Cho $A=\begin{bmatrix}1&3&-1\\2&0&5\\6&-2&4\end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f:\mathrm{P}_2[x]\to\mathrm{P}_2[x]$ đối với cơ sở $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ trong đó: $v_1=3x+3x^2,v_2=-1+3x+2x^2,v_3=3+7x+2x^2$.

a) Tìm $f\left(v_1\right),f\left(v_2\right),f\left(v_3\right)$. b) Tìm $f\left(1+x^2\right)$.

Bài 61. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+x_2-x_3,x_1-x_2+x_3,-x_1+x_2+x_3\right).$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B=\{v_1=(1;0;0),v_2=(1;1;0),v_3=(1;1;1)\}$.

Bài 62. (CK 20151) Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathrm{P}_2[x] \to \mathrm{P}_2[x]$ thỏa mãn:

$f\left(1-x^2\right) = -3+3x-6x^2, f\left(3x+2x^2\right) = 17+x+16x^2, f\left(2+6x+3x^2\right) = 32+7x+25x^2.$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathrm{P}_2[x]$. Tính $f\left(1+x^2\right)$.

b) Xác định m để véc tơ $v = 1+x+mx^2$ thuộc $\mathrm{Im}f$.

Bài 63. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ đối với cặp cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ của $\mathbb{R}^4$ và $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ trong đó :

$$v_1 = (0;1;1;1), v_2 = (2;1;-1;-1), v_3 = (1;4;-1;2), v_4 = (6;9;4;2)$$
$$\text{và} \quad u_1 = (0;8;8), u_2 = (-7;8;1), u_3 = (-6;9;1).$$

a) Tìm $[f(v_1)]_{B'}, [f(v_2)]_{B'}, [f(v_3)]_{B'}, [f(v_4)]_{B'}$.

b) Tìm $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$.

c) Tìm $f(2;2;0;0)$.

Bài 64. Cho toán tử tuyến tính trên $\mathrm{P}_2[x]$ xác định bởi:

$f(1+2x) = -19+12x+2x^2; f(2+x) = -14+9x+x^2; f\left(x^2\right) = 4-2x-2x^2.$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathrm{P}_2[x]$ và tìm $\mathrm{rank}(f)$.

Bài 65. Cho V, V' là 2 KGVT n chiều có $dim(V) = dim(V')$ và $f : V \to V'$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh các khẳng định sau tương đương:

a) f là đơn ánh. b) f là toàn ánh. c) f là song ánh.

Bài 66. (CK 20141) Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$f(x_1;x_2;x_3) = (x_1-2x_2+x_3; x_1+x_2-x_3; mx_1-x_2+x_3)$, với m là tham số.

Xác định ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và tìm m để f là một toàn ánh.

Bài 67. Tìm các giá trị riêng và cơ sở không gian riêng của các ma trận:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e) $E = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

Bài 68. Cho biến đổi tuyến tính $f : \mathrm{P}_2[x] \to \mathrm{P}_2[x]$ xác định như sau:

$$f\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right) = (5a_0+6a_1+2a_2) - (a_1+8a_2)x + (a_0-2a_2)x^2.$$

a) Tìm các trị riêng của f. b) Tìm các véc tơ riêng ứng với các trị riêng tìm được.

Bài 69. Tìm ma trận P làm chéo hóa A và xác định $P^{-1}AP$ khi đó với:

a) $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Vận dụng tính A^n.

Bài 70. Ma trận A có đồng dạng với ma trận chéo không? Nếu có, tìm ma trận chéo đó:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 71. Tìm cở sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có dạng chéo trong đó

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_2, -x_1 + x_2 + 2x_3)$.

Bài 72. (CK 20172) Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(1; 2; -1) = (4; -2; -6), f(1; 1; 2) = (5; 5; 0), f(1; 0; 0) = (1; 2; 1)$

a) Tìm m để $u = (6; -3; m) \in \text{Im}f$.

b) Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f.

Bài 73. Cho $f : V \to V$ là toán tử tuyến tính. Giả sử $f^2 = f \circ f : V \to V$ có giá trị riêng λ^2. Chứng minh một trong 2 giá trị λ hoặc $-\lambda$ là giá trị riêng của f.

Bài 74. (CK 20161) Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -10 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.

a) Tính $f(1 + x + x^2)$. Tìm m để $v = 1 - x + mx^2$ thuộc Ker$f$.

b) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo.

Bài 75. Cho A là ma trận kích thước $m \times n, B$ là ma trận kích thước $n \times p$. Chứng minh $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$, với $\text{rank}(A) =$ hạng của ma trận A.

Chương 5

Không gian Euclide

Bài 76. Giả sử V là KGVT n chiều với cơ sở $B = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$. Với u, v là các véc tơ của V ta có $u = a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n; v = b_1e_1+b_2e_2+\cdots+b_ne_n$. Đặt $\langle u, v\rangle = a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.
a) Chứng minh $\langle u, v\rangle$ là một tích vô hướng trên V.
b) Áp dụng cho trường hợp $v = \mathbb{R}^3$, với $\mathrm{e}_1 = (1; 0; 1), \mathrm{e}_2 = (1; 1; -1), \mathrm{e}_3 = (0; 1; 1), u = (2; -1; -2), v = (2; 0; 5)$. Tính $\langle u, v\rangle$.
c) Áp dụng cho trường hợp $v = \mathrm{P}_2[x]$, với $B = \{1; x; x^2\}, u = 2 + 3x^2, v = 6 - 3x - 3x^2$. Tính $\langle u, v\rangle$.
d) Áp dụng cho trường hợp $v = \mathrm{P}_2[x]$, với $B = \{1 + x; 2x; x - x^2\}, u = 2+3x^2, v = 6-3x-3x^2$. Tính $\langle u, v\rangle$.

Bài 77. Xét không gian $\mathrm{P}_3[x]$. Kiểm tra các dạng $\langle p, q\rangle$ sau có phải là tích vô hướng hay không?
a) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$
b) $\langle p, q\rangle = \mathrm{p}(0)\mathrm{q}(0) + \mathrm{p}(1)\mathrm{q}(1) + \mathrm{p}(2)\mathrm{q}(2) + \mathrm{p}(3)\mathrm{q}(3)$
c) $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{p}(x)\mathrm{q}(x)\mathrm{dx}$.
Trong trường hợp là tích vô hướng tính $\langle p, q\rangle$ với $\mathrm{p} = 2 - 3x + 5x^2 - x^3$, $\mathrm{q} = 4 + x - 3x^2 + 2x^3$.

Bài 78. Cho V là không gian Euclide. Chứng minh:
a) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) \quad \forall u, v \in V$.
b) $u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad \forall u, v \in V$.

Bài 79. 4 **(CK 20143)**. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f\left[(x_1; x_2), (y_1; y_2)\right] = x_1y_1 + ax_1y_2 - x_2y_1 + bx_2y_2$. Tìm điều kiện của a, b để đây là một tích vô hướng trên không gian vectơ $\mathbb{R}^2$. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^2$ với tích vô hướng kể trên với $b = 2$, tìm góc tạo bởi hai vectơ $u = (3; 4), v = (4; -3)$.

Bài 80. Cho cơ sở $B = \{(1; 1; -2), (2; 0; 1), (1; 2; 3)\}$ trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc. Trực giao hóa Gram-Schmidt cơ sở B để thu được cơ sở trực chuẩn B' và tìm tọa độ của véc tơ $u = (5; 8; 6)$ đối với cơ sở B'.

Bài 81. Tìm hình chiếu trực giao của véc tơ u lên không gian sinh bởi véc tơ v:

a) $u = (1; 3; -2; 4), v = (2; -2; 4; 5)$

b) $u = (4; 1; 2; 3; -3), v = (-1; -2; 5; 1; 4)$.

Bài 82. Cho không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc và các véc tơ $u = (3; -2; 1), v_1 = (2; 2; 1), v_2 = (2; 5; 4)$. Đặt $W = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$. Xác định hình chiếu trực giao của véc tơ u lên không gian W.

Bài 83. (CK 20172) Cho không gian Euclide $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc.

a) Trực chuẩn hóa Gram - Smith hệ gồm 2 véc tơ sau : $u_1 = (1; 1; 1; 0), u_2 = (0; 1; 1; 1)$

b) Cho véc tơ $v = (3; 2; 4; 2)$. Xác định véc tơ $u \in \operatorname{Span}\{u_1, u_2\}$ sao cho $\|u - v\|$ nhỏ nhất.

Bài 84. (CK 20161) Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho các véc tơ $\boldsymbol{u} = (\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{-1})$, $v = (3; 6; 3)$ và đặt $H = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w \perp u\}$.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H.

b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H.

Bài 85. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho $u_1 = (6; 3; -3; 6), u_2 = (5; 1; -3; 1)$. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian sinh bởi $\{u_1, u_2\}$.

Bài 86. Trong $\mathrm{P}_2[x]$ định nghĩa tích vô hướng $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ với $p, q \in \mathrm{P}_2[x]$.

a) Trực chuẩn hoá Gram - Schmidt cơ sở $B = \{1; x; x^2\}$ để nhận được cơ sở trực chuẩn A.

b) Xác định ma trận chuyển cơ sở từ B sang A

c) Tìm $[\mathrm{r}]_A$ biết $\mathrm{r} = 2 - 3x + 3x^2$

Bài 87. Trong $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các véc tơ

$v_1 = (1; 1; 0; 0; 0), v_2 = (0; 1; -1; 2; 1), v_3 = (2; 3; -1; 2; 1)$. Gọi $V = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x \perp v_\mathrm{i}, \mathrm{i} = 1; 2; 3\}$.

a) Chứng minh V là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^5$.

b) Tìm $\dim V$.

Bài 88. Cho V là không gian Euclide n chiều, V_1 là không gian con m chiều của V. Gọi $V_2 = \{x \in v \mid x \perp v, \quad \forall v \in V_1\}$.

a) Chứng minh V_2 là không gian véc tơ con của V.

b) Chứng minh V_1 và V_2 bù nhau.

c) Tìm $\dim V_2$.