Giới thiệu về ánh xạ

Ánh xạ là một khái niệm toán học cơ bản đã từng được giới thiệu trong chương trình phổ thông. Đây là là khái niệm tổng quát của khái niệm hàm số. Ánh xạ đề cập đến các tương ứng giữa các tập hợp bất kỳ. Khi nghĩ về ánh xạ từ tập hợp X đến tập hợp Y, ta có hiểu và ghi nhớ ánh xạ như việc gán các nhãn $y \in Y$ cho tất cả các sản phẩm $x \in X$.

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm về ánh xạ, các loại ánh xạ đặc biệt và phép hợp thành các ánh xạ. Liên hệ các khái niệm với kiến thức thực tế ở cuộc sống xung quanh.
- Kĩ năng: Kiểm tra định nghĩa ánh xạ, ánh xạ đặc biệt như đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Xác định hợp thành các ánh xạ và ánh xạ ngược.

Nội dung bao gồm:

3.1 Định nghĩa ánh xạ

3.2 Các ánh xạ đặc biệt

3.3 Tích (hợp thành) các ánh xạ và ánh xạ ngược

3.1. Định nghĩa ánh xạ

Định nghĩa 1

Cho hai tập hợp X, Y khác rỗng. Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử xác định duy nhất $y \in Y$, ký hiệu bởi $y = f(x)$.Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y thường được viết là

$$
\begin{aligned}
f : X &\to Y \\
x &\mapsto y = f(x)
\end{aligned}
$$

Tập X được gọi là tập nguồn của ánh xạ, tập Y được gọi là tập đích của ánh xạ, ký hiệu $\mapsto$ chỉ quy tắc thực hiện ánh xạ. Phần tử $y = f(x)$ được gọi là ảnh của x, còn phần tử x được gọi là tạo ảnh của y. Cho $A \subset X$ và $B \subset Y$, ta định nghĩa $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ gọi lại ảnh của tập A và $f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\}$ gọi là nghịch ảnh của tập B.

3.1. Định nghĩa ánh xạ

Ví dụ 1

1. *Xét tập hợp thực* $\mathbb{R}$. *Với mỗi số thực* $x \in \mathbb{R}$, *chúng ta xây dựng một quy tắc như sau* $f(x) = x^2 - 1$. *Khi đó, một ánh xạ được xác định*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 1. \end{aligned}$$

2. *Cho* $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, *khi đó* $f(A) = \{0; 8; 24; 48; 80; \}$, $f^{-1}(A) = \{\pm\sqrt{2}; \pm 2; \pm\sqrt{6}; \pm 2\sqrt{2}; \pm\sqrt{10}\}$.

3.2. Các loại ánh xạ đặc biệt

- Cho tập $X \neq \varnothing$, chúng ta xây dựng một quy tắc với mỗi phần tử $x \in X$ với chính nó. Khi đó, một ánh xạ được xác định
$$\begin{aligned} f : X &\to X \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$
Ánh xạ, được ký hiệu bởi Id_X, gọi là anh xạ đồng nhất trên tập X.
- Cho tập con $X \subset Y$, chúng ta xây dựng một quy tắc với mỗi phần tử $x \in X$ với chính nó. Khi đó, một ánh xạ được xác định
$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$
Ánh xạ, được ký hiệu bởi μ_X, gọi là anh xạ nhúng tập X vào tập Y.
- Cho hai tập X, Y, chúng ta xây dựng một quy tắc với mỗi phần tử $(x, y) \in X \times Y$ với thành phần thứ nhất x. Khi đó, một ánh xạ được xác định
$$\begin{aligned} f : X \times Y &\to X \\ (x, y) &\mapsto x. \end{aligned}$$
Ánh xạ, được ký hiệu bởi π_X, gọi là ánh xạ chiếu (chiếu lên thành phần thứ nhất).

3.2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Định nghĩa 2

Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

1. *Ánh xạ* f *được gọi là đơn ánh nếu*
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
đúng với mọi x_1, x_2 *thuộc tập* X.
2. *Ánh xạ* f *được gọi là toàn ánh nếu với mỗi* $y \in Y$ *đều tồn tại ít nhất một* $x \in X$ *sao cho* $y = f(x)$.
3. *Ánh xạ* f *được gọi là song ánh nếu nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh.*

Chú ý

1. Khi chứng minh ánh xạ f là đơn ánh trong một số trường hợp ta có thể xét:
   - $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in X$ hoặc;
   - Phương trình $y = f(x)$ có không quá một nghiệm với mọi $y \in Y$.
2. Ánh xạ f là toàn ánh khi và chỉ khi phương trình $y = f(x)$ có ít nhất một nghiệm với mọi $y \in Y$;
3. Ánh xạ f là song ánh khi và chỉ khi phương trình $y = f(x)$ luôn có nghiệm duy nhất.

3.3. Tích các ánh xạ

Định nghĩa 3

Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ *và* $g : Y \to Z$*. Xây dựng ánh xạ* $h : X \to Z$ *là một quy tắc biến mỗi* $x \in X$ *thành* $h(x) = g(f(x))$*. Ánh xạ* h *được gọi là tích của hai ánh xạ* f *và* g*, ký hiệu bởi* $g \circ f$*. Ta có*

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)], \forall x \in X.$$

Ví dụ 2

Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *và* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, xác định bởi* $f(x) = 5x + 3$ *và* $g(x) = x^2 + 1$*. Khi đó, chúng ta có*

1. *Ánh xạ tích* $g \circ f(x) = (5x + 3)^2 + 1$*;*
2. *Ánh xạ tích* $f \circ g(x) = 5(x^2 + 1) + 3$*.*

3.3. Ánh xạ ngược

Định nghĩa 4

Cho song ánh $f : X \to Y$*. Rõ ràng với mỗi* $y \in Y$ *đều tồn tại duy nhất một* $x \in X$ *để* $y = f(x)$ *hay* $f^{-1}(y) = x$*. Khi đó*

$$
\begin{aligned}
f^{-1} : Y &\to X \\
y &\mapsto f^{-1}(y)
\end{aligned}
$$

được gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f*. Ánh xạ* f^{-1} *là một song ánh và ta có* $f \circ f^{-1} = Id_Y; f^{-1} \circ f = Id_X$

3.3. Ánh xạ ngược

Ví dụ 3

1. *Ánh xạ*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^3 + 3 \end{aligned}$$

là một song ánh và có ánh xạ ngược là:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[3]{\frac{x-3}{2}} \end{aligned}$$

2. *Ánh xạ*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

không có ánh xạ ngược vì f không phải là song ánh ($f(-1) = f(0)$).