# Chương 1
# CÁC KIẾN THỨC CƠ SỞ

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

# Chương 1

Chương 1 giới thiệu cho các bạn sinh viên các kiến thức nền tảng của toán học nói chung và môn học Đại số nói riêng. Các bạn sinh viên đã được biết đến các kiến thức này trong chương trình toán ở bậc phổ thông. Tuy nhiên kiến thức của chương sẽ cung cấp lại một cách hệ thống và đầy đủ hơn.

**Nội dung Chương 1 bao gồm:**

1. Logic
2. Tập hợp
3. Ánh xạ
4. Các cấu trúc đại số và số phức

# Logic

Logic là cơ sở của tất cả các suy luận toán học, nó có nhiều ứng dụng thực tế trong toán học, khoa học máy tính và các lĩnh vực nghiên cứu khác. Kiến thức về logic trang bị cho sinh viên năng lực phân tích các suy luận có hiệu lực và suy luận ngụy biện để người ta có thể phân biệt được luận cứ nào là hợp lý và luận cứ nào có chỗ không hợp lý.

## Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm về mệnh đề, suy luận logic. Liên hệ các khái niệm với kiến thức thực tế ở cuộc sống xung quanh.
- Kĩ năng: Thao tác xem xét giá trị chân lý của các mệnh đề, sự tương đương logic, phát biểu các mệnh đề, mệnh đề chứa biến qua các phép toán.

## Các nội dung chính gồm:

**1.1** Mệnh đề và giá trị chân lý

**1.2** Phép toán mệnh đề, biểu thức mệnh đề và bảng giá trị chân lý

**1.3** Tương đương logic và các luật logic

**1.4** Hàm mệnh đề

# 1.1.Mệnh đề và giá trị chân lý

Mệnh đề toán học là một *khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai*, không thể nhập nhằng tính đúng sai. Mỗi mệnh đề toán học chỉ có một trong hai giá trị chân lý $0$ hoặc $1$. Mệnh đề có giá trị chân lý $1$ là mệnh đề đúng, có giá trị chân lý $0$ là mệnh đề sai. Người ta thường dùng các ký hiệu $A, B, C, \ldots$ để ký hiệu cho các mệnh đề, $V(A), V(B), \ldots$ ký hiệu cho giá trị chân lý của các mệnh đề.

### Một số ví dụ

- "Hà Nội là thủ đô của Việt Nam" là mệnh đề đúng
- "Hãy chạy ngay đi!" không phải là mệnh đề
- "1+1=3" là mệnh đề sai
- "Hôm nay là thứ mấy" không phải là mệnh đề

### Một số lưu ý

- Khẳng định "hôm nay trời mưa" có phải là mệnh đề không? Đây không phải là mệnh đề do đây khẳng định chưa rỏ ràng về địa điểm và thời điểm nên tính đúng sau bị nhập nhằng.
- Khẳng định "Tồn tại sự sống ngoài trái đất" có phải là mệnh đề không? Đây là mệnh đề do tính đúng sai không nhập nhằng nhưng do hạn chế về thông tin và hiểu biết nên đến thời điểm này vẫn tính đúng sai vẫn còn đang tranh cãi. Các tình huống như vậy trong khoa học thường được gọi là vấn đề mở hay giả thuyết.

# 1.2. Phép toán mệnh đề

Các mệnh đề phức tạp trong toán học là những mệnh đề được tạo thành từ những mệnh đề đơn giản hơn nhờ vào các liên kết logic hay còn gọi là các *phép toán logic*.

## Phép phủ định

*Phủ định* của mệnh đề $A$ là một mệnh đề, được ký hiệu là $\overline{A}$, nhận giá trị chân lý đúng khi $A$ sai và sai khi $A$ đúng.

Bảng giá trị chân lý của phép phủ định

| $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

# 1.2. Phép toán mệnh đề

## Phép hội

Cho hai mệnh đề $A$, $B$. *Hội* của hai mệnh đề $A$, $B$ là một mệnh đề, đọc là $A$ và $B$, ký hiệu là $A \wedge B$, nhận giá trị chân lý đúng khi cả hai mệnh đề $A$, $B$ đều có giá trị đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

Bảng giá trị chân lý của phép hội

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

# 1.2. Phép toán mệnh đề

## Phép tuyển

Cho hai mệnh đề $A$, $B$. *Tuyển* của hai mệnh đề $A$, $B$ là một mệnh đề, đọc là $A$ hoặc $B$, ký hiệu là $A \vee B$, nhận giá trị chân lý sai khi cả hai mệnh đề $A$, $B$ đều có giá trị sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Bảng giá trị chân lý của phép tuyển

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

# 1.2.Phép toán mệnh đề

## Phép tuyển

Cho hai mệnh đề $A$, $B$. *Tuyển* của hai mệnh đề $A$, $B$ là một mệnh đề, đọc là $A$ hoặc $B$, ký hiệu là $A \vee B$, nhận giá trị chân lý sai khi cả hai mệnh đề $A$, $B$ đều có giá trị sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Bảng giá trị chân lý của phép tuyển

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

# 1.2. Phép toán mệnh đề

## Phép kéo theo

Cho hai mệnh đề $A$, $B$. Khi đó $A$ *kéo theo* $B$ là một mệnh đề, ký hiệu là $A \to B$, chỉ nhận giá trị sai khi $A$ đúng và $B$ sai, và đúng trong các trường hợp còn lại.

Bảng giá trị chân lý của phép kéo theo

| $A$ | $B$ | $A \to B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

Phép kéo theo $A \to B$ còn được phát biểu theo ngôn ngữ thông thường là *"từ $A$ suy ra $B$"*, hoặc là *"nếu có $A$ thì có $B$"*. Ngoài ra mệnh đề này còn được phát biểu dưới dạng: *"Có $B$ khi có $A$"* hoặc *"Có $A$ chỉ khi có $B$"*. Khi đó ta nói rằng "$A$ là điều kiện *đủ* để có $B$" và "$B$ là điều kiện *cần* đối với $A$".

# 1.2. Phép toán mệnh đề

## Phép tương đương

Cho hai mệnh đề $A$, $B$. Khi đó $A$ *tương đương* $B$ là một mệnh đề, ký hiệu là $A \leftrightarrow B$, nhận giá trị đúng nếu cả $A$ và $B$ cùng nhận một giá trị chân lý, và sai trong các trường hợp còn lại.

Bảng giá trị chân lý của phép tương đương

| $A$ | $B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

Nếu mệnh đề $A \leftrightarrow B$ nhận giá trị đúng, thì ta nói hai mệnh đề *tương đương* hoặc $A$ *cần và đủ* với $B$ hoặc $A$ *khi và chỉ khi* có $B$, hoặc $A$ *nếu và chỉ nếu* với $B$.

# 1.2. Biểu thức mệnh đề (công thức)

Cho các mệnh đề $A, B, \ldots$, một *biểu thức mệnh đề* là một công thức được tạo thành từ các mệnh đề $A, B, \ldots$ cùng các phép toán logic. Khi các mệnh đề $A, B, \ldots$ được chứa trong một biểu thức mệnh đề thì chúng được gọi là các *biến mệnh đề*.

**Ví dụ 1**

*Một số biểu thức mệnh đề*

$$(A \to B) \vee (C \leftrightarrow D)$$

$$(\overline{A} \to \overline{B}) \wedge C$$

**Bảng giá trị chân lý của một biểu thức mệnh đề**

Một biểu thức mệnh đề $\mathcal{P}$, được tạo thành từ các biến mệnh đề $A, B, \ldots$, sẽ nhận giá trị chân lý xác định đối với mỗi bộ giá trị chân lý của biến mệnh đề. Nếu $\mathcal{P}$ nhận giá trị chân lý $1$ hoặc nhận giá trị chân lý $0$ với mọi bộ giá trị chân lý có thể có của các biến mệnh đề có có mặt trong $\mathcal{P}$, thì khi đó $\mathcal{P}$ được gọi là một biểu thức *hằng đúng* hoặc biểu thức *hằng sai* tương ứng.

# 1.2. Biểu thức mệnh đề (công thức)

**Ví dụ 2**

*Cho* $P, Q$ *là các mệnh đề và các biểu thức mệnh đề* $(P \to Q) \wedge P$ *và* $P \wedge Q$*. Lập bảng giá trị chân lý của hai mệnh đề trên:*

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $(P \to Q) \wedge P$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

# 1.3. Tương đương logic

**Lưu ý:** Trong quá trình xem xét các biểu thức mệnh đề, chúng ta sẽ sử dụng *khái niệm tương đương logic* $\Leftrightarrow$ thay thế cho khái niệm "bằng nhau" của các biểu thức. Hai biểu thức gọi là tương đương logic nếu giá trị chân lý của hai biểu thức giống nhau trong mọi tình huống.
Ta có một số các tương đương logic cơ bản sau:

1. Phủ định của phủ định:
   $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$
2. Tính chất giao hoán:
   $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
   $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
3. Tính chất kết hợp
   $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
   $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
4. Tính chất phân phối
   $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
   $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
5. Tính chất của phép kéo theo
   $A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$

# 1.3.Tương đương logic

6. Tính chất của phép tương đương
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$
7. Tính lũy đẳng
$A \wedge A \Leftrightarrow A$
$A \vee A \Leftrightarrow A$
8. Tính chất phép tương đương
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$
9. Luật De Morgan
$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$
$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$
10. Đẳng thức với $0$ và $1$
$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ , $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$ , $A \vee 0 \Leftrightarrow A$
$A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow 0$ (*Luật mâu thuẫn*)
$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow 1$ (*Luật bài trung*)

# 1.4. Hàm mệnh đề

Một phát biểu $P(x)$ đối với biến $x$ được gọi là một *hàm mệnh đề* hoặc một *vị từ* nếu với mỗi giá trị của $x = x_0$, ở đó $x_0$ nằm trong miền xác định $\mathcal{A}$ thì $P(x_0)$ là một mệnh đề.

**Ví dụ 3**

$P(x) : 2x - 4 > 0, x \in \mathbb{R}.$

*Mệnh đề trên được phát biểu là "Tập các số thực $x$ thỏa mãn điều kiện $2x - 4 > 0$ ". Với số thực $x$ thỏa mãn điều kiện $x \leq 2$ thì mệnh đề $P(x)$ là sai, còn số thực $x$ thỏa mãn điều kiện $x > 2$ thì mệnh đề $P(x)$ là đúng.*

# 1.4. Lượng từ tồn tại và lượng từ phổ biến

Cho hàm mệnh đề $P(x)$ xác định trên miền $\mathcal{M}$. Trong thực tế, chúng ta cần phát biểu những mệnh đề có dạng "Với mọi $x \in \mathcal{M}$ có tính chất $P(x)$". Khi đó, mệnh đề này được quy ước và ký hiệu như sau:

$$\forall x \in \mathcal{M}, P(x)$$

ký hiệu $\forall$ được gọi là *lượng từ phổ biến* hay *lượng từ toàn thể*.
Tương tự, chúng ta cũng có những mệnh đề có dạng "Tồn tại $x \in \mathcal{M}$ có tính chất $P(x)$". Khi đó, mệnh đề này được quy ước và ký hiệu như sau:

$$\exists x \in \mathcal{M}, P(x)$$

ký hiệu $\exists$ được gọi là *lượng từ tồn tại*.
Phép phủ định của lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại được cho bởi công thức tương ứng sau:

$$\overline{\forall x, P(x)} \Leftrightarrow \exists x, \overline{P(x)}$$
$$\overline{\exists x, P(x)} \Leftrightarrow \forall x, \overline{P(x)}$$

**Ví dụ 4**

*Cho mệnh đề*

$$P : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + 2y = 3$$

*Phủ định của mệnh đề trên là:*

$$\overline{P} : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + 2y \neq 3$$