Chương 4
ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

Nội dung Chương 4

Nội dung Chương 4

1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính
2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính
3. Trị riêng và véc tơ riêng

3. TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm giá trị riêng, véc tơ riêng, ma trận chéo hoá được.
- Kỹ năng: Tìm được giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận và toán tử tuyến tính, đưa ma trận chéo hoá được về dạng chéo và thực hiện chéo hoá toán tử thông qua ma trận của nó.

Nội dung

3.1 Định nghĩa

Trong phần này ta sẽ luôn xét V là không gian véc tơ n chiều trên trường số $\mathbb{K}$ và f là toán tử tuyến tính trên V.

Định nghĩa

Số $\lambda \in \mathbb{K}$ được gọi là *giá trị riêng* hay *trị riêng* của f nếu tồn tại véc tơ $u \neq \theta$ sao cho $f(u) = \lambda u$. Khi đó ta nói u là *véc tơ riêng* ứng với giá trị riêng λ.

Ví dụ

Xét ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi: $f(x, y) = (y, x) \, \forall \, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Ta có:

$$f(1; -1) = (-1; 1) = (-1).(1; -1)$$

nên $\lambda = -1$ là một giá trị riêng của f và $(1; -1)$ là véc tơ riêng tương ứng với nó.

3.1 Định nghĩa

Tính chất của véc tơ riêng và giá trị riêng

1. Véc tơ riêng của phép biến đổi tuyến tính có giá trị riêng duy nhất.
2. Nếu u là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ và $0 \neq k \in \mathbb{K}$ thì ku cũng là vectơ riêng ứng với cùng giá trị riêng λ.
3. Nếu u_1, u_2 là hai véc tơ riêng độc lập tuyến tính của toán tử tuyến tính f với cùng một giá trị riêng λ thì tổng $u_1 + u_2$ cũng là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ.
4. Nếu $u_1, u_2, ..., u_s$ là các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của toán tử tuyến tính f với cùng một giá trị riêng λ thì mọi tổ hợp tuyến tính không tầm thường của các véc tơ này cũng là một véc tơ riêng với giá trị riêng λ.

Nhận xét

Tập hợp gồm véc tơ không và mọi véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của f là một không gian con của V. Không gian này được gọi là *không gian con riêng ứng với giá trị riêng* λ của f . Kí hiệu là V_λ.

3.1 Định nghĩa

Mệnh đề

Nếu $u_1, u_2, ..., u_s$ là các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của f với giá trị riêng λ_1 và $v_1, v_2, ..., v_r$ là các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của f với giá trị riêng λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ thì hệ

$$S = \{u_1, ..., u_s, v_1, ..., v_r\}$$

là độc lập tuyến tính.

Chứng minh Thật vậy, giả sử ngược lại, hệ S là phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại các số $k_1, ..., k_s, l_1, ..., l_r$ thuộc trường $\mathbb{K}$, không cùng bằng 0 tất cả sao cho

$$k_1u_1 + ... + k_su_s = l_1v_1 + ... + l_rv_r.$$

Nếu cả hai vế cùng bằng θ thì mọi k_i, l_j cùng bằng 0 theo giả thiết $\{u_1, u_2, ..., u_s\}$ và $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ độc lập tuyến tính . Bây giờ giả thiết rằng hai vế của đẳng thức trên khác θ. Khi đó theo tính chất 4. vế trái là một véc tơ riêng của f với giá trị riêng λ_1, và vế phải là một véc tơ riêng của f với giá trị riêng λ_2. Điều này là trái với tính chất 1. Bởi vậy hệ S là độc lập tuyến tính.

Hệ quả

Nếu f có các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k (\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j, i, j = 1, \ldots k)$ và $u_1, u_2, \ldots u_k$ là k véc tơ riêng tương ứng thì $u_1, u_2, \ldots u_k$ là độc lập tuyến tính.

3.1 Định nghĩa

Bài toán tìm véc tơ riêng và giá trị riêng

Trong không gian véc tơ n chiều V chúng ta đã chọn một cơ sở

$$B = \{v_1, v_2, .., v_n\}$$

và giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của toán tử tuyến tính f đối với cơ sở này.
Giả sử λ là một giá trị riêng của f và u là một véc tơ riêng của nó. Khi đó

$$f(u) = \lambda u$$

Ta có

$$[f(u)]_B = A[u]_B$$

Do đó

$$A[u]_B = \lambda[u]_B$$

Tương đương với

$$(A - \lambda I)[u]_B = 0 \tag{1}$$

trong đó I là ma trận đơn vị. Giả sử $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là tọa độ của u đối với cơ sở B và $X = [u]_B$ là toạ độ cột của u. Phương trình (1) trở thành

$$(A - \lambda I)X = 0. \tag{2}$$

3.1 Định nghĩa

Bài toán tìm véc tơ riêng và giá trị riêng

Phương trình ma trận này biểu diễn một hệ n phương trình tuyến tính đẳng cấp n ẩn

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = & 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = & 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = & 0. \end{cases}$$

Nó có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi định thức

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{3}$$

Định thức $|A - \lambda I|$ là một đa thức bậc n đối với λ. Nó được gọi là *đa thức đặc trưng của ma trận* A, hay *của toán tử tuyến tính* f.
Phương trình (3) được gọi là *phương trình đặc trưng của toán tử* f, và cũng được gọi là *phương trình đặc trưng của ma trận* A.

3.1 Định nghĩa

Bài toán tìm véc tơ riêng và giá trị riêng

Các nghiệm của phương trình (3) là các giá trị riêng của f, và cũng được gọi là các *giá trị riêng của ma trận* A. Với mỗi giá trị riêng λ tìm được như là nghiệm của phương trình đặc trưng (3) chúng ta thay vào phương trình (2) để tìm vectơ riêng u.

Định lý

Số $\lambda \in \mathbb{K}$ là một giá trị riêng của f khi và chỉ khi nó là nghiệm của phương trình đặc trưng của phép biến đổi này.

Nhận xét

1. Đa thức đặc trưng là đa thức bậc n, tổng các nghiệm của đa thức (tính cả nghiệm phức nếu có) luôn bằng tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận. Đó cũng chính là tổng của các giá trị riêng thu được (tính cả giá trị riêng phức nếu có).
2. Các giá trị riêng của toán tử tuyến tính trong một $\mathbb{R}$-không gian véc tơ chỉ tính các nghiệm *thực* của phương trình đặc trưng.

3.1 Định nghĩa

Các bước tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của toán tử tuyến tính

Bước 1. Viết ma trận A của f theo một cơ sở B của V.
Bước 2. Giải $|A - \lambda I| = 0$ tìm giá trị riêng.
Bước 3. Giải $(A - \lambda I)[u]_B = 0$ véc tơ riêng tương ứng với λ.

Ví dụ

Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, x) = (-2y - 3z, -2x - 3z, 2x + 5y + 5z)$$

Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của f.

Lời giải Ta có ma trận A của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

3.1 Định nghĩa

Phương trình đặc trưng (3) của f có dạng

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ -2 & -\lambda & -3 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sau khi tính định thức ở vế trái ta được

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (\lambda^3 - \lambda^2) - (4\lambda^2 - 4\lambda) + (4\lambda - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0.$$

Bởi vậy, phương trình đặc trưng có hai nghiệm $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.
Để tìm véc tơ riêng chúng ta giải hệ phương trình (2).

3.1 Định nghĩa

- Với $\lambda = 1$, hệ phương trình (2) có dạng

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

  Nghiệm của hệ là các véc tơ có tọa độ $\{(c, -c, c),\ c \in \mathbb{R}\}$. Từ đó ta có không gian con riêng $V_{\lambda=1} = \text{span}\{u_1 = (1; -1; 1)\}$ ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$.
  Các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ là: $\{t_1(1; -1; 1), t \neq 0\}$.

- Với $\lambda = 2$, hệ phương trình (2) có dạng

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \; 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

  Nghiệm của hệ là các vectơ có tọa độ là $\{(3c, 3d, -2(c+d)),\ c, d \in \mathbb{R}\}$. Ta có không gian con riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là $V_{\lambda=2} = \text{span}\{u_2(3; 0; -2), u_3(0; 3; -2)\}$, do đó các véc tơ riêng là: $\{t_2(3; 0; -2) + t_3(0; 3; -2), t_2^2 + t_3^2 \neq 0\}$.

3.2 Chéo hoá ma trận

Định nghĩa

Cho A là ma trận vuông cấp n. A được gọi là **ma trận chéo hoá được** nếu nó đồng dạng với ma trận đường chéo, tức là tồn tại một ma trận không suy biến P sao cho

$$P^{-1}AP = D$$

với D là ma trận đường chéo.
Ma trận P đưa A về dạng chéo được gọi là **ma trận làm chéo hoá** ma trận A.

Định lý

Cho A, B là hai ma trận đồng dạng. Khi đó A, B sẽ có cùng đa thức đặc trưng, và do đó có cùng các trị riêng.

Chứng minh Ta có tồn tại ma trận không suy biến P sao cho:

$$B = P^{-1}AP$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |B - \lambda I| &= |P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| \\ &= |P^{-1}||(A - \lambda I||P| = |A - \lambda I| \end{aligned}$$

3.2 Chéo hoá ma trận

Bổ đề

Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ là các trị riêng phân biệt của ma trận A thì các véc tơ riêng tương ứng $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tương ứng là độc lập tuyến tính.

Định lý

A là chéo hoá được khi và chỉ khi A có n véc tơ riêng độc lập tuyến tính.

Chứng minh Nếu A đưa về dạng đường chéo nghĩa là tồn tại một ma trận P sao cho

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} := D$$

Suy ra

$$AP = PD$$

3.2 Chéo hoá ma trận

Giả sử $P = (v_1 v_2 \dots v_n)$ với $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ là các véc tơ cột của P, ta có

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2, \dots Av_n = \lambda_n v_n.$$

Như vậy A có n véc tơ riêng là $v_1, v_2, \dots, v_n$.
Ngược lại, giả sử A có n véc tơ riêng $\{u_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$ với

$$Au_1 = \lambda_1 u_1, Au_2 = \lambda_2 u_2, \dots Au_n = \lambda_n u_n.$$

Khi đó ta xây dựng ma trận P có $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là các véc tơ cột

$$P = (u_1 u_2 \dots u_n)$$

Khi đó

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

nên

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Như vậy A chéo hoá được.

3.2 Chéo hoá ma trận

Ví dụ

Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Chéo hoá ma trận A.

Lời giải

Ta có $|A - \lambda I| = -(\lambda - 9)^2(\lambda + 9)$.

Với $\lambda_1 = 9$, hệ phương trình $(A - \lambda I)X = 0$ tương đương với phương trình

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

Bởi vậy không gian con riêng ứng với $\lambda = 9$

$$V_{\lambda=9} = \{u = (c, -2c - 2d, d),\ c, d \in \mathbb{R}\} = \{u = c(1; -2; 0) + d(0; -2; 1),\ c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Ta được một cơ sở của không gian riêng con này là $u_1 = (1; -2; 0),\ u_2 = (0; -2; 1)$.

Với $\lambda_2 = -9$, hệ phương trình $(A - \lambda I)X = 0$ tương đương với hệ phương trình

3.2 Chéo hoá ma trận

$$\begin{cases} -10x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -4x_1 - 16x_2 - 4x_3 = 0 \\ -8x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Bởi vậy không gian riêng ứng với $\lambda = -9$

$$V_{\lambda=-9} = \{v = (2t, t, 2t),\ t \in \mathbb{R}\} = \{v = t(2;1;2),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Ta chọn một vectơ cơ sở của không gian riêng con này là $u_3 = (2, 1, 2)$.
Khi đó

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

thoả mãn

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

3.2 Chéo hoá ma trận

Quy trình chéo hoá ma trận

Bước 1. Tìm các giá trị riêng của của ma trận A từ việc giải phương trình đa thức

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Bước 2. Với mỗi giá trị riêng λ_i $(i = 1, 2, ..., s)$, tìm một cơ sở B_i của không gian con riêng tương ứng là không gian nghiệm của hệ phương trình:

$$(A - \lambda_i I)X = 0.$$

Bước 3. Lập B là hợp các cơ sở B_i vừa tìm được ở Bước 2 để thu được các véc tơ riêng. Nếu số véc tơ bằng n, giả sử $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, thiết lập ma trận chéo hóa P với cột thứ j là véc tơ u_j, $P = (u_1 u_2 \dots u_n)$.
Khi đó ma trận P sẽ làm chéo hoá ma trận A, hơn nữa

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$$

trong đó $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ là các trị riêng ứng với véc tơ riêng u_i.
Nếu số véc tơ trong B nhỏ hơn n, kết luận ma trận A không chéo hoá được.

3.2 Chéo hoá ma trận

Ta sẽ chỉ ra rằng có những ma trận không đưa được về dạng chéo.

Ví dụ

Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$, nên ma trận chỉ có một giá trị riêng là $\lambda = 1$. Tuy nhiên với $\lambda = 1$ hệ phương trình xác định các vectơ riêng là

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 = 0. \end{cases}$$

Do đó nghiệm của hệ có dạng $(0, c, 0),\ c \in \mathbb{R}$. Như vậy, không gian nghiệm của hệ này là một chiều nên hệ vectơ riêng độc lập tuyến tính chỉ gồm một vectơ, do đó A không thể đưa về dạng chéo.

3.3 Chéo hoá toán tử tuyến tính

Cho V là không gian véc tơ trên trường K và f là toán tử tuyến tính trong V. Ta đã biết ma trận của f tương ứng với các cơ sở khác nhau của V là đồng dạng với nhau. Vậy có tồn tại cơ sở của V để ma trận của f tương ứng với cơ sở đó có dạng chéo?

Định nghĩa

Cho V là không gian véc tơ trên trường K và f là toán tử tuyến tính trong V. f được gọi là chéo hoá được nếu tồn tại một cơ sở B của V để cho ma trận của f tương ứng với cơ sở đó là ma trận chéo. Quá trình tìm cơ sở B được gọi là quá trình chéo hoá f.

Định lý

Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian véc tơ V.

1. f chéo hóa được
2. f có n véc tơ riêng độc lập tuyến tính
3. Tồn tại một cơ sở của V gồm những vectơ riêng của f.

3.3 Chéo hoá toán tử tuyến tính

Quy trình chéo hoá toán tử tuyến tính

Bước 1. Chọn một cơ sở E tuỳ ý của V (thường là cơ sở chính tắc). Tìm ma trận A của f đối với B.
Bước 2. Chéo hoá ma trận A. Nếu A không chéo hoá được thì f không chéo hoá được (không tồn tại cơ sở B của V để ma trận của f đối với B là ma trận chéo). Nếu A chéo hoá được chuyển sang bước 3.
Bước 3. Giả sử P là ma trận làm chéo hoá A. Xét cơ sở B của V sao cho P là ma trận chuyển từ cơ sở E sang B. Khi đó ma trận của f đối với B là $P^{-1}AP$ là ma trận chéo.

Ví dụ

Cho toán tử tuyến tính f trong $\mathbb{R}^3$ có ma trận đối với một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Chéo hoá toán tử tuyến tính f.

3.3 Chéo hoá toán tử tuyến tính

Ta có:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)=0.$$

Vậy các giá trị riêng của A là : $\lambda=1, \lambda=2, \lambda=4$.
Để tìm véc tơ riêng ta giải hệ phương trình (2).
Với $\lambda=1$, hệ phương trình (2) có dạng

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=0 \\ 3x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

Hệ này tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ \qquad -3x_2+x_3=0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là các vectơ có tọa độ $\{(-5t,t,3t),\ t\in\mathbb{R}\}$. Chúng lập thành một không gian con một chiều mà cơ sở là véc tơ u_1 có tọa độ $(-5;1;3)$.

3.3 Chéo hoá toán tử tuyến tính

Với $\lambda = 2$, hệ phương trình (2) có dạng

$$\begin{cases} -x_1 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ là các vectơ có tọa độ là $\{(0, t, -t),\ t \in \mathbb{R}\}$. Chúng lập thành một không gian con có cơ sở là vectơ: $u_2(0; 1; -1)$.
Với $\lambda = 4$, hệ phương trình (2) có dạng

$$\begin{cases} -3x_1 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ là các vectơ có tọa độ là $\{(0, t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$. Chúng lập thành một không gian con có cơ sở là vectơ: $u_3(0; 1; 1)$.
Ta có $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ gồm những véc tơ riêng của f. Khi đó đối với cơ sở này ma trận của f có dạng:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$