Chương 2

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

Chương 2

Chương 2 giới thiệu cho các bạn sinh viên các kiến thức về ma trận, định thức và hệ phương trình tuyến tính. Chúng cung cấp các công cụ hữu hiệu giúp chúng ta tìm hiểu nội dung của các chương tiếp theo.

Nội dung Chương 2 bao gồm:

1. Ma trận và các phép toán
2. Định Thức
3. Ma trận nghịch đảo
4. Hạng của ma trận
5. Hệ phương trình tuyến tính

Trong chương này, $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$.

3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm ma trận khả nghịch, điều kiện để một ma trận là ma trận khả nghịch, các tính chất của ma trận nghịch đảo và cách tìm ma trận nghic đảo.
- Kĩ năng: Sinh viên thành thạo tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch.

Nội dung

3.1 Định nghĩa và tính chất

3.2 Điều kiện cần và đủ để ma trận khả nghịch

3.3 Cách tìm ma trận nghịch đảo

3.1 Định nghĩa và tính chất

Với $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ là tập hợp các ma trận cấp n trên trường $\mathbb{K}$ và I (hay E) là ma trận đơn vị cấp n.

Định nghĩa

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sao cho

$$AB = BA = I.$$

Khi đó, ma trận B gọi là ma trận nghịch đảo của A và ký hiệu là $B = A^{-1}$.

Như vậy, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Hơn nữa, ma trận nghịch đảo của ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nếu tồn tại, là duy nhất. Ký hiệu $GL_n(\mathbb{K})$ là tập hợp các ma trận khả nghịch cấp n với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *là ma trận khả nghịch với ma trận nghịch đảo là* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 2

Giả sử ma trận vuông A thỏa mãn $A^2 + A - I = \theta$. Khi đó $A^2 + A = I$ và do đó, ta có $A(A+I) = (A+I)A = I$. Từ đó suy ra $A^{-1} = A + I$.

3.1 Định nghĩa và tính chất

Mệnh đề

1. Ma trận đơn vị I khả nghịch và $I^{-1} = I$.
2. Nếu $A \in GL_n(\mathbb{K})$ thì $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ và $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Nếu $A \in GL_n(\mathbb{K})$ thì $A^t \in GL_n(\mathbb{K})$ và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
4. Nếu $A \in GL_n(\mathbb{K})$ và $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$ thì $kA \in GL_n(\mathbb{K})$ và $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
5. Nếu $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ thì $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Chú ý

Để chứng minh ma trận X khả nghịch với ma trận nghịch đảo là Y, ta chỉ cần chỉ ra $XY = I$ và $YX = I$.

Hệ quả

$GL_n(\mathbb{K})$ cùng phép nhân ma trận với ma trận lập thành một nhóm.

Nhóm $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ này không giao hoán với mọi $n \geq 2$.

3.2 Điều kiện cần và đủ để ma trận khả nghịch

Cho $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ và A_{ij} là phần phụ đại số của a_{ij} với $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
Đặt $C = [A_{ij}]_{n\times n}$, ta có bổ đề sau.

Bổ đề

Với mọi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ta có
$$C^t A = AC^t = \det(A)I.$$

Chứng minh

Với mỗi $i, k = 1, 2, \ldots, n$, gọi D_{ik} là định thức của ma trận có được từ ma trận A bằng việc thay các phần tử a_{ij} bởi a_{kj}, $j = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó, nếu $i = k$ thì $D_{ik} = \det(A)$; nếu $i \neq k$ thì $D_{ik} = 0$ (vì có hàng i và k giống nhau). Khai triển D_{ik} theo hàng i ta được $D_{ik} = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in}$. Bởi vậy

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq k \\ \det(A) & \text{nếu } i = k. \end{cases}$$

Do đó, ta có $AC^t = \det(A)I$. Tương tự, $C^t A = \det(A)I$.

3.2 Điều kiện cần và đủ để ma trận khả nghịch

Định nghĩa

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ gọi là ma trận không suy biến nếu $\det(A) \neq 0$.

Định lý

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ khả nghịch khi và chỉ khi A không suy biến.

Hệ quả

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ khả nghịch khi và chỉ khi tồn tại ma trận B sao cho $AB = I$ hoặc $BA = I$.

Ví dụ 3

Tìm các giá trị của tham số λ để ma trận $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ *khả nghịch.*

3.3 Cách tìm ma trận nghịch đảo

Bài toán: *Cho ma trận khả nghịch* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Tìm ma trận nghịch đảo* A^{-1}.

Phương pháp 1: Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách sử dụng các phần phụ đại số

Bước 1. Tính $\det(A)$.

Bước 2. Xác định các phần phụ đại số $A_{ij},\ \forall i, j$.

Bước 3. Lập ma trận $C = [A_{ij}]$. Áp dụng công thức $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$.

Ví dụ 4

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Chú ý

Ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ với $ad - bc \neq 0$.

3.3 Cách tìm ma trận nghịch đảo

Phương pháp 2: Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách giải phương trình ma trận
Xét phương trình ma trận $AX = I$ với I là ma trận đơn vị cấp n. Vì A khả nghịch nên phương trình có nghiệm duy nhất là $X = A^{-1}$.

Ví dụ 5

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có $\det(A) = -2 \neq 0$ nên A khả nghịch. Gọi $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Khi đó

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ 3a + 4c = 0 \end{cases} \text{và} \begin{cases} b + 2d = 0 \\ 3b + 4d = 1 \end{cases}$$

Bởi vậy $a = -2,\ b = -1,\ c = -\frac{-3}{2},\ d = \frac{1}{2}$ và vì vậy $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

3.3 Cách tìm ma trận nghịch đảo

Phương pháp 3: Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp biến đổi sơ cấp:

Bước 1. Viết ma trận đơn vị cấp n vào sau ma trận A để được ma trận cỡ $n \times 2n$: $[A|I]$.

Bước 2. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng đưa ma trận $[A|I]$ về ma trận có dạng $[I|B]$ (ma trận A thành ma trận đơn vị I và ma trận đơn vị I thành ma trận B). Khi đó, B chính là ma trận A^{-1}:

$$[A|I] \xrightarrow[\text{theo hàng}]{\text{bđsc}} [I|B] \Rightarrow B = A^{-1}.$$

Ví dụ 6

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.