Chương 2

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

Chương 2

Chương 2 giới thiệu cho các bạn sinh viên các kiến thức về ma trận, định thức và hệ phương trình tuyến tính. Chúng cung cấp các công cụ hữu hiệu giúp chúng ta tìm hiểu nội dung của các chương tiếp theo.

Nội dung Chương 2 bao gồm:

1. Ma trận và các phép toán
2. Định Thức
3. Ma trận nghịch đảo
4. Hạng của ma trận
5. Hệ phương trình tuyến tính

Trong chương này, $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$.

1. MA TRẬN VÀ CÁC PHÉP TOÁN

Ma trận và các tính chất của ma trận là trọng tâm của đại số tuyến tính. Các ma trận rất hữu dụng bởi vì chúng cho phép ta xét một bảng gồm rất nhiều số như một đối tượng duy nhất, ký hiệu nó bởi một biểu tượng và biểu diễn các tính toán với các biểu tượng đó một cách ngắn gọn, dễ dàng.

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm ma trận, một số ma trận đặc biệt, hai ma trận bằng nhau, các phép toán của ma trận và các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận.
- Kĩ năng: Sinh viên thực hành thành thạo các phép toán và các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận.

Nội dung

1.1 Khái niệm ma trận

1.2 Hai ma trận bằng nhau

1.3 Các phép toán của ma trận

1.4 Một số phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

1.1 Khái niệm ma trận

- Một ma trận cỡ $m \times n$ là một bảng số hình chữ nhật gồm m hàng, n cột dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  với $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Số a_{ij} gọi là phần tử của ma trận A, nằm ở hàng i, cột j, với mọi $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
  Ký hiệu ma trận: sử dụng ngoặc tròn như trên hoặc ngoặc vuông.
  Ta viết $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ để chỉ A là ma trận m hàng, n cột với các phần tử a_{ij}.
- Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ thì A gọi là ma trận thực, nếu $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ thì A gọi là ma trận phức.

Ví dụ 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ *là ma trận cỡ* 2×3, *các phần tử* $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3, a_{21} = 5, a_{22} = -4,\ a_{23} = 6.$

1.1 Khái niệm ma trận

- Ma trận cỡ $1 \times n$ gọi là ma trận hàng. Ma trận cỡ $m \times 1$ gọi là ma trận cột.
- Ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ với $a_{ij} = 0, \ \forall i, j$, được gọi là ma trận không, ký hiệu là θ.
- Nếu số hàng và số cột của A bằng nhau $(m = n)$ thì A gọi là ma trận vuông cấp n. cấp n với các phần tử thuộc trường $\mathbb{K}$.

Ví dụ 2

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ *là ma trận cột,* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *là ma trận hàng, và* $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *là ma trận vuông cấp 3.*

Kí hiệu:

- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: tập hợp các ma trận cỡ $m \times n$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: tập hợp các ma trận vuông cấp n với các phần tử thuộc trường $\mathbb{K}$.

Cho ma trận vuông cấp n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- Các phần $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ gọi là các phần tử chéo chúng lập thành đường chéo chính của A.
- Nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i > j$ (tức là các phần tử nằm dưới đường chéo chính đều là 0) thì A gọi là ma trận tam giác trên.
- Nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i < j$ (tức là các phần tử nằm trên đường chéo chính đều là 0) thì A gọi là ma trận tam giác dưới.
- Nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$ (tức là các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều là 0) thì A được gọi là ma trận đường chéo (hoặc ma trận chéo).
- Nếu A là ma trận đường chéo và tất cả các phần tử trên đường chéo chính là 1 thì A được gọi là ma trận đơn vị cấp n.
  Ma trận đơn vị cấp n thường được ký hiệu là I_n hoặc E_n. Khi không quan tâm đến cấp của ma trận thì ta ký hiệu là I hoặc E.

Ví dụ

Ví dụ 3

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *là ma trận vuông cấp 3 với các phần tử chéo là* $1, 5, 9$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *là ma trận tam giác dưới.*

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *là ma trận đường chéo.*

d) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *và* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *là các ma trận đơn vị cấp 2 và cấp 3.*

1.2. Hai ma trận bằng nhau

Định nghĩa

Hai ma trận A và B gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử tương ứng của chúng bằng nhau.

Ví dụ 4

Hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ *không bằng nhau vì chúng không cùng cỡ.*

Ví dụ 5

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & x \\ -1 & y & 2 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} z & 5 & 4 \\ -1 & 5 & t \end{pmatrix}$. *Tìm* x, y, z, t *để* $A = B$.

1.3. Các phép toán của ma trận

• **Phép cộng hai ma trận**

Định nghĩa

Cho hai ma trận cùng cỡ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Tổng $A + B$ là ma trận cỡ $m \times n$ xác định bởi $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Như vậy, cộng hai ma trận cùng cỡ, ta cộng các phần tử tương ứng của chúng với nhau.

Ví dụ 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+(-1) & 3+0 \\ 4+(-3) & 5+1 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa

1. Ma trận đối của ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ký hiệu là $-A$, xác định bởi $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.
2. Hiệu của hai ma trận cùng cỡ A và B, ký hiệu là $A - B$ xác định bởi

$$A - B = A + (-B).$$

Phép cộng hai ma trận

Mệnh đề

Với mọi ma trận A, B, C cùng cỡ, ta có

1. Tính kết hợp: $(A+B)+C = A+(B+C)$;
2. Tính giao hoán: $A+B = B+A$;
3. $A+\theta = \theta+A = A$, ở đó θ là ma trận không, cùng cỡ với A;
4. $A+(-A) = (-A)+A = \theta$.

Hệ quả

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cùng với phép cộng ma trận là một nhóm giao hoán với phần tử trung hòa là ma trận không θ.

Phép cộng hai ma trận

Mệnh đề

Với mọi ma trận A, B, C cùng cỡ, ta có

1. Tính kết hợp: $(A+B)+C = A+(B+C)$;
2. Tính giao hoán: $A+B = B+A$;
3. $A+\theta = \theta + A = A$, ở đó θ là ma trận không, cùng cỡ với A;
4. $A+(-A) = (-A)+A = \theta$.

Hệ quả

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cùng với phép cộng ma trận là một nhóm giao hoán với phần tử trung hòa là ma trận không θ.

Phép nhân một số với ma trận

Định nghĩa

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ trên trường $\mathbb{K}$ và số $k \in \mathbb{K}$. Tích của k và A được xác định bởi $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$.

Như vậy, nhân số k với ma trận A là nhân k vào mỗi phần tử của A.

Ví dụ 7

Tích của 3 *và ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ *là ma trận*

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot(-5) & 3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & -15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Phép nhân một số với ma trận

Mệnh đề

Với mọi ma trận cùng cỡ A, B và số $k, l \in \mathbb{K}$, ta có:

1. $k(A+B) = kA + kB$;
2. $(k+l)A = kA + lA$;
3. $k(lA) = (kl)A$;
4. $1A = A$, $(-1)A = -A$;
5. $0A = \theta$;
6. $k\theta = \theta$.

Ví dụ 8

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận* X *sao cho* $2X + A = B$.

Phép nhân ma trận với ma trận

Định nghĩa

Giả sử $A = [a_{ik}]_{m\times p}$ và $B = [b_{kj}]_{p\times n}$ là các ma trận cỡ $m \times p$ và $p \times n$ tương ứng. Tích AB là ma trận $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ cỡ $m \times n$, ở đó phần tử c_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ được xác định bởi công thức

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. \tag{1}$$

Pt c_{ij} được tính bằng cách nhân tương ứng các pt trên hàng i của A với các pt trên cột j của B rồi cộng lại.

$$c_{ij} = \underset{\text{(hàng } i \text{ của } A)}{\xrightarrow{\quad a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ip} \quad}} \times \left\downarrow \begin{array}{c} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{array}\right.$$

(cột j của B)

Phép nhân ma trận với ma trận

Lưu ý tích AB chỉ được xác định khi số cột của A bằng số hàng của B. Hơn nữa, ma trận tích AB có số hàng bằng số hàng của A, có số cột bằng số cột của B.

Ví dụ 9

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. *Tính* $C = AB$.

Phép nhân ma trận với ma trận

Mệnh đề

Giả sử A, B, C là các ma trận sao cho các phép toán trong các hệ thức sau thực hiện được và $k \in \mathbb{K}$. Khi đó:

1. $IA = A,\ \ BI = B$ với I là ma trận đơn vị có cấp phù hợp;
2. Tính kết hợp: $(AB)C = A(BC)$;
3. Tính phân phối của phép nhân ma trận đối với phép cộng ma trận:
$$A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)A = BA + CA;$$
4. $k(AB) = (kA)B$.

Hệ quả

Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, tập $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ cùng với phép cộng ma trận và phép nhân ma trận với ma trận lập thành một vành không giao hoán, có đơn vị là I_n.

Phép nhân ma trận với ma trận

Chú ý

1. Tích AB tồn tại nhưng chưa chắc tích BA tồn tại.
2. Phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán, tức là nếu AB và BA tồn tại thì nói chung $AB \neq BA$.
3. Từ hệ thức $AB = \theta$ không suy ra được $A = \theta$ hoặc $B = \theta$.

Ví dụ 10

Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *và* $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Khi đó*

i) $AB = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$ *và* $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ *nên* $AB \neq BA$.

ii) DC *tồn tại nhưng* CD *không tồn tại.*

iii) $DD = \theta$ *nhưng* $D \neq \theta$.

Phép nhân ma trận với ma trận

Chú ý

1. Khi A là ma trận vuông và $m \in \mathbb{N}^*$, ta ký hiệu $A^m = AA \cdots A$ (m ma trận A).
2. Cho đa thức $p(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$ với $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, và A là một ma trận vuông cấp n. Khi đó $p(A)$ được xác định bởi

$$p(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \cdots + a_{m-1} A + a_m I_n,$$

ở đó I_n là ma trận đơn vị cấp n.

Ví dụ 11

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *và đa thức* $p(x) = 2x^2 - 3x - 1$. *Tính* $p(A)$.

Ma trận chuyển vị

Định nghĩa

Ma trận chuyển vị của ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ký hiệu là A^t, xác định bởi $A^t = [b_{ij}]_{n\times m}$ trong đó $b_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ và $j = 1, 2, \ldots, m$.

Ta có thể có được ma trận chuyển vị A^t từ ma trận A bằng cách viết hàng của A thành cột của A^t hoặc viết cột của A thành hàng của A^t một cách tương ứng.

Ví dụ 12

Ma trận chuyển vị của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *là* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Mệnh đề

Giả sử A, B là các ma trận sao cho các phép toán trong các hệ thức sau thực hiện được và $k \in \mathbb{K}$. Khi đó

1. $(A^t)^t = A$;
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$;
3. $(kA)^t = kA^t$;
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

Ma trận đối xứng - Ma trận phản xứng

Định nghĩa

Cho ma trận A vuông cấp n.

1. A gọi là ma trận đối xứng nếu $A^t = A$.
2. A gọi là ma trận phản xứng (hay phản đối xứng) nếu $A^t = -A$.

Rõ ràng, nếu $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n là ma trận đối xứng (tương ứng phản xứng) thì $a_{ij} = a_{ji}$ (tưng ứng $a_{ij} = -a_{ji}$) với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Hơn nữa, các phần tử chéo của ma trận phản xứng đều bằng 0.

Ví dụ 13

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ *là ma trận đối xứng và* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ *là ma trận phản xứng.*

1.4 Một số phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Định nghĩa

Cho ma trận A. Các phép biến đổi sau gọi là các phép biến đổi sơ cấp:

1. Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) cho nhau;
2. Nhân một hàng (hay một cột) với một số khác 0;
3. Cộng vào một hàng (t.ư. một cột) một bội của hàng (t.ư. một cột) khác.

Ký hiệu:

- h_i để chỉ hàng i, c_j để chỉ cột j;
- $h_i \leftrightarrow h_j$ (t.ư. $c_i \leftrightarrow c_j$): đổi chỗ hai hàng i, j (t.ư. hai cột i, j) cho nhau;
- λh_i (t.ư. λc_i): nhân số λ với hàng i (t.ư. cột i);
- $h_k + \lambda h_i \to h_k$ (t.ư. $c_k + \lambda c_i \to c_k$): nhân hàng i (t.ư. cột i) với λ rồi cộng vào hàng h_k (t.ư. cột k).

Ví dụ 14

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{2h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3+(-14)h_1 \to h_3]{h_2+(-4)h_1 \to h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -12 & -24 \end{pmatrix}.$$