Chương 2

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

Chương 2

Chương 2 giới thiệu cho các bạn sinh viên các kiến thức về ma trận, định thức và hệ phương trình tuyến tính. Chúng cung cấp các công cụ hữu hiệu giúp chúng ta tìm hiểu nội dung của các chương tiếp theo.

Nội dung Chương 2 bao gồm:

1. Ma trận và các phép toán
2. Định Thức
3. Ma trận nghịch đảo
4. Hạng của ma trận
5. Hệ phương trình tuyến tính

Trong chương này, $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$.

4. HẠNG CỦA MA TRẬN

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm hạng của ma trận và các tính chất của nó.
- Kĩ năng: Sinh viên thành thạo tính hạng của ma trận bằng các phép biến đổi sơ cấp

Nội dung

4.1 Khái niệm hạng của ma trận

4.2 Ma trận bậc thang

4.3 Tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp

4.1 Khái niệm hạng của ma trận

Cho ma trận cỡ $m \times n$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Định nghĩa

Cho k là một số nguyên dương, $k \leq \min\{m, n\}$. Ma trận vuông cấp k có được từ ma trận A bằng cách bỏ đi $(m-k)$ hàng và $(n-k)$ cột nào đó gọi là ma trận con cấp k của A. Định thức của nó gọi là định thức con cấp k của A.

Nhận xét

Ma trận con cấp k của A tạo bởi các phần tử nằm ở giao của k hàng và k cột nào đó của A. Bởi vậy A có $C_m^k.C_n^k$ ma trận con cấp k (có thể không phân biệt).

4.1 Khái niệm hạng của ma trận

Ví dụ 1

Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ có cỡ 3×4.

Ma trận A có $C_3^3.C_4^3 = 4$ định thức con cấp 3:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 8 & 10 & 12 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 6 & 10 & 12 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 12 \end{vmatrix}, D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix}.$$

Ma trận A có $C_3^2.C_4^2 = 18$ định thức con cấp 2:

$$D_{12}^1 = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}, D_{34}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}, D_{13}^3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}, D_{14}^3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}, \ldots$$

4.1 Khái niệm hạng của ma trận

Định nghĩa

Hạng của ma trận A, ký hiệu là $\operatorname{rank}(A)$ hoặc $\mathrm{r}(A)$, là cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của A.

Quy ước: hạng của ma trận không là 0.
Như vậy, $\operatorname{rank}(A) = r$ khi và chỉ khi A có một định thức con cấp r khác 0 và mọi định thức con cấp cao hơn r của A đều bằng 0.

Ví dụ 2

Với ma trận A trong Ví dụ 1, ta có $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0$, tức là tất cả các định thức con cấp 3 của nó đều bằng 0. Bởi vậy $\operatorname{rank}(A) < 3$. Mặt khác, vì $D^1_{12} = 4 \neq 0$ nên $\operatorname{rank}(A) \geq 2$. Từ đó ta có $\operatorname{rank}(A) = 2$.

Nhận xét

Để tìm hạng của ma trận theo định nghĩa, chúng ta cần xét lần lượt các định thức con của A có cấp từ cao xuống thấp cho đến khi gặp một định thức con khác 0.

Một số tính chất về hạng của ma trận

1. Nếu A là ma trận cỡ $m \times n$ thì $0 \leq \operatorname{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$.
2. Với mọi ma trận A ta có $\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A)$.
3. Với A là ma trận vuông cấp n, nếu $\det(A) \neq 0$ thì $\operatorname{rank}(A) = n$; nếu $\det(A) = 0$ thì $\operatorname{rank}(A) < n$.

4.2 Ma trận bậc thang

Hàng không của một ma trận được hiểu là hàng có các phần tử đều là 0.

Định nghĩa

Một ma trận gọi là ma trận bậc thang nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. Các hàng không (nếu có) phải nằm dưới các hàng khác không.
2. Với hai hàng khác không, phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên nằm phía bên trái phần từ khác không đầu tiên của hàng dưới.

Như vậy, với ma trận bậc thang, các phần tử cùng cột và nằm dưới phần tử khác 0 đầu tiên (kể từ trái qua phải) của một hàng nào đó đều bằng 0.

Ví dụ 3

Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ma trận A là ma trận bậc thang, các ma trận B, C không là ma trận bậc thang.

4.2 Ma trận bậc thang

Mệnh đề

Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của nó.

Ví dụ 4

Hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ bằng 3.

4.3 Tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp

Vì các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi tính bằng 0 hay khác 0 của các định thức con của một ma trận nên nó cũng không làm thay đổi hạng của ma trận.

Mệnh đề

Hạng của ma trận không đổi khi áp dụng các phép biến đổi sơ cấp.

Tìm hạng ma trận A:

$$A \xrightarrow{\text{bđsc}} B: \text{ ma trận bậc thang}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = \text{số hàng khác không của } B.$$

4.3 Tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp

$A \xrightarrow{\text{bđsc}} B$: ma trận bậc thang $\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) =$ số hàng khác không của B.

Ví dụ 5

Tìm hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có

$$A \xrightarrow{h1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h4-h1\to h4]{\substack{h2-2h1\to h2 \\ h_3-3h1\to h3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[h4-h2\to h4]{h3-h2\to h3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{h3 \leftrightarrow h4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 3.$$