Chương 5
DẠNG SONG TUYẾN TÍNH, DẠNG TOÀN PHƯƠNG VÀ KHÔNG GIAN EUCLID

[1]

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

[1] Email: sami@hust.edu.vn

3. KHÔNG GIAN EUCLIDE

Trên không gian các véc tơ thông thường, chúng ta đã nghe quen thuộc với các khái niệm như tích vô hướng, góc các véc tơ, độ dài, quan hệ trực giao, hình chiếu trực giao,...Một câu hỏi tự nhiên là trên các không gian véc tơ tổng quát có các khái niệm này không? Các khái niệm được xây dựng và ứng dụng như thế nào?

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm tích vô hướng định nghĩa không gian Euclide và các vấn đề cần xem xét trên không gian Euclid
- Kĩ năng: Kiểm tra tích vô hướng, xem xét quan hệ trực giao trên không gian Euclide như hệ trực giao, trực giao hóa, không gian trực giao, hình chiếu trực giao, phép biến đổi trực giao, bài toán chéo hóa trực giao.

Nội dung

3.1 Khái niệm tích vô hướng và định nghĩa không gian Euclide

3.2 Độ dài và góc của các véc tơ

3.3 Quan hệ trực giao trên không gian Euclide

3.4 Ma trận trực giao và phép biến đổi trực giao

3.5 Phép biến đổi đối xứng và bài toán chéo hóa trực giao

3.1. Khái niệm tích vô hướng và định nghĩa không gian Euclide

Định nghĩa tích vô hướng. Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian. *Tích vô hướng* trên V là một dạng song tuyến tính đối xứng mà dạng toàn phương của nó là xác định dương.

Ví dụ

1. Cho $V = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. Ta xét dạng sau:
$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$$
là một dạng song tuyến tính đối xứng, xác định dương trên $\mathbb{R}^2$, nên là một tích vô hướng
2. Tổng quát, cho $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, 0), \ldots,$ và A là một ma trận đối xứng cấp n có các định thức con chính đều dương. Ta xét dạng sau: $f(x, y) = x^TAy$ là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$. Ngược lại, khi chọn trước cơ sở của không gian V, mỗi tích vô hướng sẽ tương ứng với một ma trận A đối xứng cấp n có các định thức con chính đều dương.
3. Cho $V = P_2[x]$, $p(x), q(x)$ là hai đa thức của V. Khi đó dạng sau: $f(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1)$ là một dạng song tuyến tính đối xứng nhưng không xác định dương (ví dụ như $f(x^2 - x, x^2 - x) = 0$ nhưng $x^2 - x \neq 0$). Do đó, đây không phải là một tích vô hướng
4. Cho $V = C_{[a;b]}$ là không gian véc tơ các hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$, $f(x), g(x) \in V$. Khi đó dạng sau: $T(f(x), g(x)) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$ là một dạng song tuyến tính đối xứng và dạng toàn phương liên kết với T là $\phi(f(x)) = \displaystyle\int_a^b [f(x)]^2dx$ xác định dương nên T là một tích vô hướng trên V.

3.1. Khái niệm tích vô hướng và định nghĩa không gian Euclide

Định nghĩa. Một không gian vectơ thực mà trên đó đã cho một tích vô hướng được gọi là một *không gian Euclide*. Tích vô hướng trên không gian Euclide thường được ký hiệu là $\langle u, v\rangle$.
Ví dụ 1. Trong không gian $V = \mathbb{R}^n$, với $u = (x_1, ..., x_n)$, $v = (y_1, ..., y_n)$, ta đặt:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

$\langle u, v\rangle$ là một tích vô hướng, tích này được gọi là tích vô hướng *chính tắc* của $\mathbb{R}^n$. Khi đó ta có không gian Euclide $\mathbb{R}^n$.
Ví dụ 2. Ký hiệu $C_{[a,b]}$ là không gian các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$. Khi đó tích vô hướng cho bởi

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

biến $C_{[a,b]}$ thành một không gian Euclide.

3.2. Độ dài và góc của các véc tơ

Tích vô hướng $\langle u, u\rangle$ được gọi là *bình phương vô hướng* của vectơ u, ký hiệu là u^2.
Độ dài của vectơ u, ký hiệu $\|u\|$, được xác định bởi

$$\|u\| = \sqrt{u^2}.$$

Nhận xét:

- $\|u\| = 0$ khi và chỉ khi $u = 0$
- $\|ku\| = |k|\|u\|$, $k \in \mathbb{R}$
- $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|.\|v\|$ (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Bất đẳng thức tam giác)

Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz suy ra rằng

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|.\|v\|} \leq 1.$$

Bởi vậy, số thực $r = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|}$ có thể xem như cosin của một góc α, nghĩa là tồn tại một góc α, $0 \leq \alpha \leq \pi$, sao cho:

$$cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|}.$$

Số α xác định như vậy gọi là *góc* giữa hai vectơ u, v.

Ví dụ

Cho $V = P_2[x]$ là một không gian Euclide với tích vô hướng $\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.
Xét 2 véc tơ $p(x) = 1 + 2x - x^2, q(x) = 3 + x^2$. Ta có

$$\|p(x)\| = \sqrt{p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2} = \sqrt{6},$$

$$\|q(x)\| = \sqrt{q(0)^2 + q(1)^2 + q(2)^2} = \sqrt{84},$$

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) = 1.3 + 2.4 + 1.7 = 18,$$

Góc α của 2 véc tơ có

$$\cos\alpha = \frac{18}{\sqrt{6.84}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

3.3. Quan hệ trực giao trên không gian Euclide

Cho không gian Euclide V với tich vô hướng $\langle , \rangle$.

1. Hai vectơ u, v gọi là *trực giao* nếu tích vô hướng $\langle u, v\rangle = 0$.
2. Hệ vectơ $u_1, u_2, \dots, u_s (s \geq 2)$ được gọi là *trực giao* nếu các vectơ của hệ khác véc tơ không và đôi một trực giao, tức là $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ với $i \neq j$. Ta có thể dễ dàng chứng minh được rằng: Hệ véc tơ trực giao là độc lập tuyến tính.
3. Vectơ u gọi là *chuẩn* hay *đơn vị* nếu $||u|| = 1$. Đối với vectơ $u \neq \theta$ thì các vectơ

$$\frac{u}{||u||}, \frac{u}{-||u||}$$

   đều là vectơ đơn vị, và được gọi là *chuẩn hóa* của vectơ u. Hệ vectơ $u_1, u_2, \dots, u_s (s \geq 2)$ được gọi là *trực chuẩn* nếu nó là một hệ trực giao và mỗi vectơ đều là chuẩn, tức là

$$u_i.u_j = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

4. Một cơ sở là hệ trực giao thì gọi là một cơ sở trực giao. Một cơ sở là hệ trực chuẩn thì gọi là cơ sở trực chuẩn.

3.3. Quan hệ trực giao trên không gian Euclide

Cho không gian Euclide V với tích vô hướng $\langle , \rangle$, $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V.

1. Tọa độ của véc tơ $[u]_B^T = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)$ thì $x_i = \langle u, u_i \rangle$.
2. Cho $[u]_B^T = x = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)$,$[v]_B^T = y = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n)$ thì $\langle u, v \rangle = x^T y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$.

Trực giao hóa Gram - Schmidt Trong một không gian véc tơ Euclide, từ mỗi cơ sở đều có thể xây dựng một cơ sở trực chuẩn. Điều này có thể được thực hiện bởi phương pháp *trực giáo hóa Gram - Schmidt* Giả sử $u_1, u_2, \ldots, u_n$ là một cơ sở nào đó của không gian Euclide V. Từ cơ sở này chúng ta sẽ xây dựng một hệ trực giao như sau:
Đặt $e_1 = u_1$. Ta tìm véc tơ e_2 sao cho $e_2.e_1 = 0$ bằng cách đặt $e_2 = u_2 + k_{21}e_1$. Do $e_1.e_2 = 0$ nên $e_1.u_2 + k_{21}e_1^2 = 0 \Rightarrow k_{21} = -\dfrac{e_1.u_2}{e_1^2}$. Tiếp đó ta tìm véc tơ e_3 sao cho hệ e_1, e_2, e_3 trực giao bằng cách đặt $e_3 = u_3 + k_{31}e_1 + k_{32}e_2$. Từ $e_1.e_3 = e_2.e_3 = 0$ suy ra $e_1.u_3 + k_{31}e_1^2 = 0, \ e_2.u_3 + k_{32}e_2^2 = 0$. Từ đó $k_{31} = -\dfrac{e_1.u_3}{e_1^2}, \ k_{32} = -\dfrac{e_2.u_3}{e_2^2}$. Quá trình này được tiếp tục để xác định tới e_{r-1}. Khi đó e_r được xác định sao cho $e_i.e_r = 0, i = 1, 2, \ldots, r-1$ bằng cách đặt $e_r = u_r + k_{r1}e_1 + k_{r2}e_2 + \cdots + k_{r(r-1)}e_{r-1}$, với $k_{rj} = -\dfrac{e_j.u_r}{e_j^2}, \ j = 1, 2, \ldots, r-1$. Như vậy chúng ta đã dựng được một hệ véc tơ trực giao $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Sau khi chuẩn hóa hệ véc tơ này ta thu được một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide V.

3.3. Quan hệ trực giao trên không gian Euclide

Ví dụ. Trong không gian Euclide $V = \mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc và cho cơ sở $B = \{u_1 = (1; 2; -1), u_2 = (1; -1; 2), u_3 = (2; 1; 3)\}$. Sử dụng trực giao hóa Gram - Schmidt, hãy dựng một cơ sở trực chuẩn của V từ cơ sở này.

Giải. Đặt

$$e_1 = u_1 = (1; 2; -1),\ e_2 = u_2 + k_{21}e_1.$$

Do tính trực giao của e_1 và e_2 ta suy ra $k_{21} = -\dfrac{e_1.u_2}{e_1^2} = -\dfrac{-3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Bởi vậy $e_2 = u_2 + \dfrac{1}{2}u_1 = (\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{3}{2})$.

Tiếp tục đặt $e_3 = u_3 + k_{31}e_1 + k_{32}e_2$.

Do tính trực giao của họ $e_i, i = 1, 2, 3$, suy ra $k_{31} = -\dfrac{e_1.u_3}{e_1^2} = -\dfrac{1}{6}$ $k_{32} = -\dfrac{e_2.u_3}{e_2^2} = -\dfrac{5}{3}$.

Bởi vậy

$$e_3 = u_3 - \frac{1}{6}e_1 - \frac{5}{3}e_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

Chuẩn hóa các véc tơ $e_i (i = 1, 2, 3)$ ta được cơ sở trực chuẩn

$$\omega_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}), \omega_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \omega_3 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

3.3. Quan hệ trực giao trên không gian Euclide

Cho V là một không gian Euclide và U là một không gian con của nó. Véc tơ $w \in U$ được gọi là *hình chiếu* của vectơ v lên không gian con U nếu véc tơ $v - w$ trực giao với mọi véc tơ của U, ký hiệu $Ch_U(v)$.
Công thức Nếu U là một không gian con của V và $\{e_i | i = 1, 2, \ldots, p\}$ là một cơ sở trực chuẩn của U thì hình chiếu của v lên U được cho bởi

$$x = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, v \rangle e_i.$$

Nhận xét:

- Hình chiếu trực giao $Ch_U(v)$ luôn tồn tại và duy nhất.
- Nếu $v \in U$ thì $Ch_U(v) = v$.
- Trong trường hợp U có cơ sở là $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ thì ta có thể trực chuẩn hóa G-S rồi áp dụng công thức bên trên hoặc tìm hình chiếu bằng định nghĩa bằng việc đặt $Ch_U(v) = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_pv_p$. Dựa trên điều kiện $v - Ch_U(v)$ trực giao với U ta suy ra $Ch_U(v).v_i = v.v_i$, qua đó xác định các x_i bằng việc giải một hệ Crame.

Ví dụ: Trên không gian $V = \mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc.
Cho $U = span(v_1 = (1;2;1), v_2 = (1;1;3))$,$v = (3;5;7)$. Xác định $Ch_U(v)$.
Lời giải
Đặt $Ch_U(v) = x_1(1;2;1) + x_2(1;1;3)$. Do $Ch_U(v).v_i = v.v_i, i = 1,2$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 = 20 \\ 6x_1 + 11x_2 = 29 \end{cases}$$

Giải ra ta có $x_1 = \frac{23}{15}, x_2 = \frac{9}{5}$. Do đó

$$Ch_U(v) = \frac{23}{15}(1;2;1) + \frac{9}{5}(1;1;3) = (\frac{10}{3}; \frac{73}{15}; \frac{104}{15}).$$

3.4. Ma trận trực giao và phép biến đổi trực giao

Định nghĩa: Ma trận vuông A gọi là ma trận trực giao nếu thỏa mãn $A.A^T = E$ hay $A^{-1} = A^T$. Ta có các khẳng định sau là tương đương

- A là ma trận trực giao.
- Các cột của ma trận A là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc.
- Các hàng của ma trận A là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc.

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Nhận xét: Cho A, B là các ma trận trực giao thì ta có

- $|A|^2 = 1$.
- A^{-1}, AB là ma trận trực giao.

3.4. Ma trận trực giao và phép biến đổi trực giao

Định nghĩa: Cho không gian Euclide V với tích vô hướng $\langle , \rangle$. Phép biến đổi tuyến tính f trên V gọi là một phép biến đổi trực giao nếu thỏa mãn $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in V$.
Ta có các khẳng định sau là tương đương:

- f là phép biến đổi trực giao.
- f bảo toàn tích vô hướng, nghĩa là $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V$.
- ma trận của f đối với 1 cơ sở trực chuẩn B của V là một ma trận trực giao.

Ví dụ: Xét phép biến đổi tuyến tính trên $V = \mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Khi đó ta có

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

3.5. Phép biến đổi đối xứng và bài toán chéo hóa trực giao

Định nghĩa: Cho không gian Euclide V với tích vô hướng $\langle , \rangle$. Toán tử tuyến tính f trên V gọi là một biến đổi đối xứng nếu thỏa mãn $\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle, \forall u, v \in V$.

Ta có các khẳng định sau là tương đương:

- f là một biến đổi đối xứng.
- Ma trận của f đối với 1 cơ sở trực chuẩn B của V là một ma trận đối xứng.

Ví dụ: Xét biến đổi tuyến tính trên $V = \mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Cho f là biến đổi tuyến tính trên không gian Euclide V (tương ứng của ma trận A đối xứng). Ta có các tính chất sau:

- Mọi giá trị riêng của f (tương ứng của A) đều là số thực. Hay khi đó ta có đa thức đặc trưng có dạng:

$$P_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda_i - \lambda)^{r_i}$$

- Các không gian riêng phân biệt của f (tương ứng của A) là trực giao với nhau.
- f (tương ứng ma trận A) chéo hóa được.

3.5. Phép biến đổi đối xứng và bài toán chéo hóa trực giao

Bài toán chéo hóa trực giao: Cho ma trận đối xứng A, tìm ma trận C trực giao sao cho $C^T AC$ chéo.

- Bước 1: Xác định đa thức đặc trưng của ma trận A và tìm các giá trị riêng.
- Bước 2: Với mỗi giá trị riêng tìm được, ta đi tìm cơ sở trực chuẩn của các không gian riêng tương ứng.
- Bước 3: Ghép các cơ sở trực chuẩn của các không gian riêng để thu được cơ sở trực chuẩn B của không gian V gồm toàn các véc tơ riêng của A. Khi đó C là ma trận các véc tơ cột của B.

3.5. Phép biến đổi đối xứng và bài toán chéo hóa trực giao

Ví dụ: Chéo hóa trực giao ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

- Bước 1: Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda - 25 = -(\lambda+1)(\lambda-5)^2$.

  Các giá trị riêng là $\lambda = -1; \lambda = 5$.
- Bước 2:
  - Với $\lambda = -1$ ta có không gian riêng $V_A(-1)$ có cơ sở trực chuẩn là $B_1 = \{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})\}$
  - Với $\lambda = 5$ ta có không gian riêng $V_A(5)$ có cơ sở trực chuẩn là $B_2 = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$
- Bước 3: Cơ sở trực chuẩn $B = B_1 \cup B_2$ của không gian V gồm toàn các véc tơ riêng của A. Ma trận trực giao $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ chéo hóa A và $C^{-1}AC = C^TAC = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.