2. TẬP HỢP

Khái niệm *tập hợp* là một trong những khái niệm cơ bản nhất của toán học và không thể định nghĩa bằng những khái niệm đã biết. Ngành toán học nghiên cứu về tập hợp gọi là lý thuyết tập hợp. Khái niệm tập hợp là nền tảng để xây dựng các khái niệm khác như số, hình, hàm số... trong toán học.

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm về tập hợp và các phép toán trên tập hợp. Liên hệ các khái niệm với kiến thức thực tế ở cuộc sống xung quanh.
- Kĩ năng: Thao tác xem xét quan hệ giữa các tập hợp, tính toán các tập hợp và chứng minh các đẳng thức tập hợp.

Nội dung bao gồm:

2.1 Khái niệm tập hợp

2.2 Các phép toán tập hợp

2.3 Tích Đề Các của các tập hợp

2.1. Khái niệm tập hợp

Tập hợp tuy không được định nghĩa một cách rõ ràng, nhưng chúng cũng được mô tả qua các ví dụ cụ thể. Một tập hợp được hiểu như là một tụ tập, một nhóm các đối tượng nào đó. Một vài ví dụ về tập hợp như: Tập hợp quận huyện của Hà Nội; tập hợp các số thực;... Trong toán học, một tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ cái $A, B, \ldots$.
Cho tập hợp A (sau này có thể gọi tắt là tập A). Các đối tượng nằm trong tập A được gọi là các *phần tử* của tập A. Phần tử thường được ký hiệu là $a, b, \ldots$. Phần tử a *thuộc* tập A được ký hiệu là $a \in A$; ngược lại nếu phần tử a *không thuộc* tập A được ký hiệu là $a \notin A$. Một tập hợp thường được thường được cho thông qua liệt kê hoặc các phần tử có cùng tính chất nào đó. Ta thường dùng biểu đồ Venn (khoanh vùng thay cho tập hợp, chấm nhỏ thay cho phần tử) để biểu diễn các tập hợp và phần tử.
Đặc biệt *Tập rỗng*, được ký hiệu là $\varnothing$, là tập hợp không chứa bất kỳ một phần tử nào.

2.1. Tập hợp con, tập hợp bằng nhau

Khi có các tập hợp, ta có một số mối liên hệ giữa các tập hợp như sau:

Tập con

1. Tập A được gọi là *tập con* của tập B và ký hiệu là $A \subset B$, nếu như mọi phần tử của A đều là phần tử của B. Khi tập A là tập con của B ta cũng có thể viết là $B \supset A$. Quy ước tập rỗng là tập con của tập bất kỳ.
2. Ví dụ: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Tập hợp bằng nhau

1. Hai tập hợp được gọi là *bằng nhau* khi và chỉ khi chúng có cùng các phần tử.
2. Để chứng minh hai tập bằng nhau $A = B$, chúng ta cần chứng minh $A \subset B$ và $B \subset A$, nghĩa là $A = B \Leftrightarrow \big(A \subset B$ và $B \subset A\big)$.
3. Ví dụ: $A = \{1, 2, 3\}$,$B = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x^2 < 10\}$.

2.2. Các phép toán trên tập hợp

Cho trước các tập hợp A, B, X, chúng ta có các phép toán sau trên tập hợp.
Phép giao. *Giao* của hai tập A và B, ký hiệu bởi $A \cap B$, là tập hợp chứa các phần tử thuộc cả A và B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

Phép hợp. *Hợp* của hai tập A và B, ký hiệu bởi $A \cup B$, là tập hợp chứa các phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc B.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Phép lấy hiệu. *Hiệu* của hai tập hợp A và B, ký hiệu là $A \setminus B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A mà không thuộc B.

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Hiệu đối xứng. *Hiệu đối xứng* của hai tập A và B, ký hiệu bởi $A \Delta B$, là tập hợp được xác định như sau

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Phần bù. Cho hai hợp A và X. Nếu $A \subset X$ thì hiệu $X \setminus A$ được gọi là *phần bù* của A trong X và được ký hiệu bởi $C_X A$.Đặc biệt $\overline{A}$ là tập bao gồm tất cả các phần tử không thuợc vào tập A trong tình huống được đề cập đến.

2.2. Tính chất của các phép toán trên tập hợp

1. *Tính chất giao hoán*
   $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, $A\Delta B = B\Delta A$.
2. *Tính chất kết hợp*
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
   $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
3. *Tính chất phân phối*
   $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
   $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. *Tính chất của phép trừ*
   $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
5. *Công thức De Morgan*
   $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ (hoặc $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$),
   $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ (hoặc $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$),

2.3. Tích Đề Các của các tập hợp

Cho hai tập hợp A và B. *Tích Đề Các (Descartes)* của hai tập hợp A và B, được ký hiểu bởi $A \times B$, là một tập hợp bao gồm các phần tử có thứ tự (a, b) với $a \in A$ và $b \in B$. Như vậy

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ví dụ 1

Cho $A = \{1; 2; 3\}$ *và* $B = \{a; b\}$, *khi đó*

$$A \times B = \{(1; a), (2; a), (3; a), (1; b), (2; b), (3; b)\}.$$

$$B \times A = \{(a; 1), (b; 1), (a; 2), (b; 2), (a; 3), (b; 3)\}.$$

Tích Đề Các của một họ các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$, được ký hiệu là $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, là một tập hợp bao gồm các phần tử có thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, với $a_i \in A_i, \forall i \in [1..n]$. Như vậy

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, \forall i \in [1..n]\}.$$

Quy ước: Khi các tập bằng nhau $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, tích Đề Các bên trên có thể được viết gọn là A^n.