Giới thiệu về cấu trúc đại số

Khi xem xét về các phần tử của tập hợp trong thực tế, ta nhận thấy rằng luôn có tác động qua lại giữa các phần tử để tạo ra các phần tử khác. Qua đó hình thành trong chúng ta tư duy về các "phép toán" trên tập hợp. Khi các phép toán mà "đủ tốt" thì các tập hợp được trang bị phép toán sẽ gọi là các cấu trúc đại số như nhóm, vành, trường,...

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được các cấu trúc đại số, nhìn nhận các cấu trúc đại số trong các kiến thức đã biết và môi trường xung quanh, xây dựng trường số phức.
- Kĩ năng: Thao tác xem xét các tính chất của phép toán hai ngôi, kiểm tra các câu trúc và xem xét các vấn đề trên trường số phức.

Nội dung bao gồm:

4.1 Phép toán hai ngôi

4.2 Nhóm

4.3 Vành

4.4 Trường

4.5 Trường số phức

4.1. Phép toán hai ngôi

Cho X là một tập khác rỗng. Một *phép toán hai ngôi* trên tập X, ký hiệu là $*$, là một quy tắc biến đổi mỗi phần tử $(x, y) \in X^2$ thành phần tử $z \in X$ sao cho $z = x * y$. Nói cách khác, phép toán $*$ là một ánh xạ:

$$\begin{aligned} * : X^2 &\to X \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned}$$

Xét một số ví dụ sau đây:

1. Xét tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, số nguyên $\mathbb{Z}$, số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, số thực $\mathbb{R}$, khi đó các phép toán $+$ hoặc phép toán . thông thường là các phép toán hai ngôi trên các tập đó;
2. Phép chia thông thường không phải là phép toán hai ngôi trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, số nguyên $\mathbb{Z}$, số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, số thực $\mathbb{R}$, vì không tồn tại phép chia cho số 0;
3. Xét tập hợp $\mathbb{R}$, ta định nghĩa phép toán $x * y = xy + x + y$.
4. Cho trước tập hợp X, ta xét $P(X) = A|A \subset X$. Trên $P(X)$ thì các phép toán giao các tập hợp, hợp các tập hợp, hiệu các tập hợp là các phép toán hai ngôi.
5. Tập A là tập tất cả các mệnh đề. Khi đó, phép hội $\wedge$, phép tuyển $\vee$, phép kéo theo $\rightarrow$, phép cần và đủ $\leftrightarrow$ là các phép toán hai ngôi trên tập A;
6. Câu hỏi: Phép trừ trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ có phải là một phép toán hai ngôi hay không?

4.1. Tính chất của phép toán hai ngôi

Cho tập X cùng phép toán hai ngôi $*$.

1. Phép toán $*$ có tính chất kết hợp khi:

   $$(a * b) * c = a * (b * c) \qquad \text{đúng với mọi } a, b, c \in X$$

2. Phép toán $*$ có tính chất giao hoán khi:

   $$a * b = b * a \qquad \text{đúng với mọi } a, b \in X$$

3. Phần tử $e \in X$ được gọi là phần tử trung hòa của phép toán $*$ nếu:

   $$a * e = e * a = a \qquad \text{đúng với mọi } a \in X$$

4. Khi e là phần từ trung hòa của phép toán $*$ và $x \in X$, khi đó phần tử x' thỏa mãn $x.x' = x'.x = e$ được gọi là phần tử đối xứng của x.
5. Trong một số tình huống, các phần tử trung hòa đôi khi còn được gọi là phần tử không, phần tử đơn vị, và tương ứng phần tử đối xứng còn được gọi là phần tử đối, phần tử nghịch đảo.

4.1. Ví dụ minh họa tính chất của phép toán hai ngôi

Một số ví dụ

1. Các tập số quen thuộc $(\mathbb{N}, *)$, $(\mathbb{Z}, *)$, $(\mathbb{Q}, *)$, $(\mathbb{R}, *)$, ở đó $*$ có thể là phép toán $+$ hoặc phép toán . thông thường có tính chất kết hợp, tính chất giao hoán, phần tử trung hòa đối với phép cộng là số 0, phần tử trung hòa đối với phép nhân là số 1;
2. Trên tập $(\mathbb{Z})$, phép trừ không có tính chất kết hợp, không có tính chất giao hoán, không có phần tử trung hòa.
3. Câu hỏi: Trên tập hợp $\mathbb{R}$, phép toán $x * y = xy + x + y$ có những tính chất gì?

4.2. NHÓM

Cho tập X khác rỗng với phép toán $*$, khi đó đại số hai ngôi $(X, *)$ lập thành một *nhóm* nếu nó thỏa mãn ba tiền đề sau:

1. Tính chất kết hợp: $(a * b) * c = a * (b * c)$, đúng với mọi $a, b, c \in X$;
2. Tồn tại phần tử trung hòa $e \in X$ sao cho $a * e = e * a = a$, đúng với mọi $a \in X$;
3. Với mỗi $a \in X$, luôn tồn tại *phần tử đối* $x' \in X$ sao cho $x * x' = x' * x = e$.

Nhóm X được gọi là *nhóm giao hoán* hoặc *nhóm Abel* nếu $a * b = b * a$, đúng với mọi $a, b \in X$.
Một số ví dụ:

1. Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ với phép cộng thông thường không phải là một nhóm vì không tồn tại phần tử đối;

4.2. NHÓM

Cho tập X khác rỗng với phép toán $*$, khi đó đại số hai ngôi $(X, *)$ lập thành một *nhóm* nếu nó thỏa mãn ba tiền đề sau:

1. Tính chất kết hợp: $(a * b) * c = a * (b * c)$, đúng với mọi $a, b, c \in X$;
2. Tồn tại phần tử trung hòa $e \in X$ sao cho $a * e = e * a = a$, đúng với mọi $a \in X$;
3. Với mỗi $a \in X$, luôn tồn tại *phần tử đối* $x' \in X$ sao cho $x * x' = x' * x = e$.

Nhóm X được gọi là *nhóm giao hoán* hoặc *nhóm Abel* nếu $a * b = b * a$, đúng với mọi $a, b \in X$.
Một số ví dụ:

1. Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ với phép cộng thông thường không phải là một nhóm vì không tồn tại phần tử đối;
2. Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$, tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, tập số thực $\mathbb{R}$ với phép cộng $+$ thông thường là một nhóm giao hoán.

Nhận xét: Cho $(X, *)$ là một nhóm, khi đó:

1. Phần tử trung hòa trong một nhóm là duy nhất, vì nếu e và e' là hai phần tử trung hòa của X thì $e' = e' * e = e * e' = e$;
2. Trong một nhóm, mỗi phần tử chỉ tồn tại duy nhất một phần tử đối của nó.

4.3. VÀNH

Cho tập X khác rỗng, trên X trang bị hai phép toán $+$ và .. Khi đó $(X, +, .)$ lập thành một vành nếu nó thỏa mãn các tiền đề sau:

1. $(X, +)$ là một nhóm Abel;
2. $(a.b).c = a.(b.c)$, đúng với mọi $a, b, c \in X$;
3. Phép toán . phân phối về hai phía đối với phép toán $+$, nghĩa là
$$a.(b + c) = a.b + a.c$$
$$(b + c).a = b.a + c.a$$
đúng với mọi $a, b, c \in X$

1. Phần tử trung hòa đối với phép toán " $+$ " thường ký hiệu là 0, gọi là phần tử trung hòa của vành. Phần tử trung hòa đối với phép toán ".", thường ký hiệu là 1, và gọi là *phần tử đơn vị* của vành (để phân biệt với phần tử trung hòa đối với phép $+$);
2. Nếu phép toán "." của vành có tính chất giao hoán thì gọi là vành giao hoán;
3. Nếu phép toán "." của vành có đơn vị thì gọi là vành có đơn vị.

Một số ví dụ:

1. Tập số nguyên $\mathbb{Z}$, tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, tập số thực $\mathbb{R}$ với các phép cộng và phép nhân thông thường là một vành giao hoán có đơn vị, ở đó phần tử trung hòa là số 0 và phần tử đơn vị là số 1;
2. Tập $\mathbb{N}$ với phép toán cộng và phép toán nhân thông thường không phải là một vành.

4.4. TRƯỜNG

Cho tập X khác rỗng, trên đó xác định hai phép toán "$+$" và ".". Khi đó $(X, +, .)$ là một *trường* nếu:

1. $(X, +, .)$ là một vành giao hoán có đơn vị 1 đối với phép toán ".";
2. Với mọi $a \in X$ sao cho $a \neq 0$, (ở đó 0 là phần tử trung hòa của phép toán "$+$"), luôn tồn tại *phần tử nghịch đảo* của a, ký hiệu a^{-1}, sao cho

$$a.a{-}1 = a^{-1}.a = 1$$

Một số ví dụ:

1. Tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, tập số thực $\mathbb{R}$ với phép toán cộng và phép toán nhân thông thường là một trường với phần tử trung hòa của phép cộng là số 0, phần tử đơn vị của phép nhân là số 1.
2. Tập số nguyên $\mathbb{Z}$ với phép toán cộng và phép toán nhân thông thường không phải là một trường.
3. Câu hỏi: Tập $P(X)$ với các phép toán ∩,∪ có phải là một trường không? Vì sao?
4. Câu bỏi: Tập $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ với các phép toán cộng, nhân modulo 5 có phải là một trường không?

4.5. XÂY DỰNG TRƯỜNG SỐ PHỨC

Cho tập số thực $\mathbb{R}$. Xây dựng tập $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a;b) | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$. Xét hai phần tử bất kỳ $x = (a;b), y = (c;d) \in \mathbb{C}$. Khi đó quan hệ bằng nhau $x = y$ trên $\mathbb{C}$ nếu $a = c$ và $b = d$. Trên $\mathbb{C}$ định nghĩa phép toán cộng ”$+$” và phép toán ”$.$” (ký hiệu $x.y = xy$) như sau:

$$x + y = (a + c; b + d)$$

$$xy = (ac - bd; ad + bc)$$

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$, với mọi $x, y, z \in \mathbb{C}$;
2. Phần tử trung hòa $0^* = (0;0) \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $x + 0^* = 0^* + x = x$, với mọi $x \in \mathbb{C}$;
3. Với mọi phần tử $x = (a;b)$, luôn tồn tại phần tử đối $x' = (-a;-b)$ thỏa mãn $x + x' = 0^*$;
4. $x + y = y + x$, với mọi $x, y \in \mathbb{C}$;
5. $(xy)z = x(yz)$, với mọi $x, y, z \in \mathbb{C}$;
6. $(x + y)z = xz + yz$ và $x(y + z) = xy + xz$, với mọi $x, y, z \in \mathbb{C}$;
7. Phần tử đơn vị $1^* = (1, 0)$ của phép toán nhân có tính chất $x1^* = 1^*x = x$, với mọi $x \in \mathbb{C}$;
8. $xy = yx$, với mọi $x, y \in \mathbb{C}$;
9. Với $x = (a;b) \neq 0^* = (0;0)$, tồn tại phần tử nghịch đảo $x^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $xx^{-1} = x^{-1} = 1*$.

Do vậy $\mathbb{C}$ cùng phép toán ”$+$” và phép toán ”$.$” là một trường, được gọi là *trường số phức*.

4.5. XÂY DỰNG TRƯỜNG SỐ PHỨC

Xét tập $\mathbb{R}^* = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$. Tập $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}$ và $\mathbb{R}^*$ cũng là một trường. Xây dựng ánh xạ

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$$

$$x \mapsto (x,0)$$

Dễ dàng kiểm tra được ánh xạ f là song ánh. Do vậy có quan hệ $1-1$ giữa trường số thực $\mathbb{R}$ và trường $\mathbb{R}^*$, hay tập số thực $\mathbb{R}$ là tập con của tập số phức $\mathbb{C}$. Khi đó số phức $(x;0)$ tương ứng là số thực x; số $0^* = (0;0)$ chính là số thực 0 và số $1^* = (1;0)$ chính là số thực 1.
Đặt $i = (0;1)$, khi đó mỗi số phức $z = (a;b)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$z = (a;b) = (a;0) + (0;b) = a(1;0) + (b;0)(0;1) = a + bi$$

a được gọi là *phần thực* của số phức z, ký hiệu là Rez; còn b được gọi là *phần ảo* của số phức z ký hiệu là Imz.
Số phức viết dưới dạng $z = a + bi$ được gọi là *dạng chính tắc* của số phức z.
Lưu ý:

1. Cho hai số phức $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, khi đó $z_1 = z_2$ nếu $Rez_1 = Rez_2$ và $Imz_1 = Imz_2$;
2. $i^2 = (0;1)(0;1) = (-1;0) = -1$.

4.5. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC VÀ DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, mỗi số phức $z = a + bi$ sẽ được biểu diễn bởi một điểm $M(a; b)$, nghĩa là mỗi điểm trên mặt phẳng sẽ biểu diễn một số phức tương ứng trong trường số phức. Mặt phẳng này được gọi là *mặt phẳng phức*. Độ dài của véc tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là *mô đun* của số phức z, ký hiệu là $|z|$.

$$|\overrightarrow{OM}| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r.$$

Góc φ tạo bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và trục Ox được xác định bởi

$$cos\varphi = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad \text{và} \qquad sin\varphi = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

được gọi là *argument* của số phức z, được ký hiệu là $Argz$.
Với các ký hiệu bên trên, số phức z có thể biểu diễn dưới dạng

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi)$$

được gọi là *dạng lượng giác* của số phức z.
Ví dụ: Dạng lượng giác của một số số phức:

1. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i = 2(cos(\frac{\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{3}))$;
2. $z_2 = 8 - 8i = 8\sqrt{2}(cos(-\frac{\pi}{4}) + isin(-\frac{\pi}{4}))$;

4.5. CÁC PHÉP TOÁN CỦA SỐ PHỨC

Cho hai số phức dưới dạng chính tắc $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$.

1. Phép cộng, phép trừ
$$z_1 \pm_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$
2. Phép nhân
$$z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$
Đặc biệt:
$$z_1.\overline{z_1} = |z_1|^2 = a_1^2 + b_1^2.$$
3. Phép chia
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (-a_1b_2 + a_2b_1)i}{a_2^2 + b_2^2} \qquad , z_2 \neq 0;$$

Các phép toán trên số phức dạng lượng giác

Cho hai số phức dưới dạng lượng giác $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$ và $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$.

1. Phép nhân
$$z_1.z_2 = r_1.r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2));$$
2. Phép chia
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)) \qquad , z_2 \neq 0;$$

4.5. SỐ PHỨC LIÊN HỢP

Cho số phức $z = a + bi$. Số phức *liên hợp* của số phức z, ký hiệu là $\overline{z} = a - bi$. Ở dạng lượng giác, số phức liên hợp của số phức $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ là số phức $z = r(cos\varphi - isin\varphi)$

Một số hệ thức của số phức liên hợp

1. Cho z_1, z_2 là các số phức.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

2. Cho số phức $z = a + bi$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$z + \overline{z} = 2a = 2Rez$$

$$z.\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|}$$

$$|\overline{z}| = |z|$$