Chương 3
KHÔNG GIAN VÉC TƠ

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

Chương 3: KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Chương 3 giới thiệu cho các bạn sinh viên về một dạng cấu trúc đại số rất phổ biến là không gian véc tơ, một tập hơn với 2 phép toán cộng và nhân ngoài với "đủ tốt" xung quanh chúng ta như các ma trận, đa thức, hàm số,....

Nội dung Chương 3 bao gồm:

1. Khái niệm không gian véc tơ
2. Không gian véc tơ con
3. Hệ véc tơ
4. Cơ sở và tọa độ

1. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Không gian véc có rất nhiều ứng dụng quan trọng trong nhiều lĩnh vực như toán học, vật lý, khoa học máy tính và kỹ thuật. Dưới đây là một vài các ứng dụng của không gian véc tơ:

Ứng dụng

- Trong ngành điều khiển tự động và robot, không gian véc tơ được sử dụng để mô tả các trạng thái và hành động của robot, thiết lập các khái niệm như không gian trạng thái và không gian hành động.
- Xử lý ảnh và âm thanh: Trong xử lý ảnh và âm thanh, không gian véc tơ được sử dụng để biểu diễn dữ liệu như hình ảnh và tín hiệu âm thanh. Các phép toán trong không gian véc tơ giúp xử lý, nén và trích xuất thông tin từ dữ liệu này.
- Máy học và học máy: Trong các thuật toán máy học và học máy, không gian véc tơ thường được sử dụng để biểu diễn dữ liệu đầu vào và các mô hình học máy. Véc tơ đặc trưng của dữ liệu thường được sử dụng để huấn luyện các mô hình dự đoán và phân loại.
- Mật mã học: Trong mật mã học, không gian véc tơ được sử dụng để biểu diễn các khái niệm như không gian khóa và không gian văn bản mã hóa.
- Kinh tế học: Trong lý thuyết kinh tế và tài chính, không gian véc tơ có thể được sử dụng để mô hình hóa các biến số và mối quan hệ giữa chúng.

Khái niệm không gian véc tơ

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu các khái niệm của không gian véc tơ, mô hình toán học trong thực tế.
- Kĩ năng: Thao tác kiểm tra khái niệm của các đối lượng là không gian véc tơ

Các nội dung chính gồm:

1.1 Định nghĩa không gian véc tơ

1.2 Các ví dụ

1.3 Tính chất của không gian véc tơ

1.1. Định nghĩa không gian véc tơ

Ta nói tập hợp V là một không gian véc tơ trên trường K, hay một K-không gian véc tơ, nếu V được trang bị một phép toán hai ngôi (gọi là phép cộng), ký hiệu $(+)$ và một phép nhân vô hướng của K, ký hiệu (.) thỏa mãn 8 điều kiện sau:

1. Tính giao hoán của phép cộng:$\forall u, v \in V$ ta có $u + v = v + u$;
2. Tính kết hợp của phép cộng:$\forall u, v, w \in V$ ta có $(u + v) + w = u + (v + w)$;
3. Tồn tại trong V một phần tử không, ký hiệu là θ (gọi là véc tơ không) thỏa mãn:$\forall u \in V$ ta có $u + \theta = \theta + u = u$;
4. $\forall u \in V$ luôn tồn tại một phần tử đối (gọi là véc tơ đối), ký hiệu là $-u$ thỏa mãn: $u + (-u) = (-u) + u = \theta$;
5. $\forall u, v \in V$, $\forall \alpha \in K$ ta có $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
6. $\forall u \in V$, $\forall \alpha, \beta \in K$ ta có $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
7. $\forall u \in V$, $\forall \alpha, \beta \in K$ ta có $(\alpha.\beta)u = \alpha.(\beta u)$;
8. $\forall u \in V$ ta có $1.u = u$ với 1 là đơn vị của trường K;

1.1.Định nghĩa không gian véc tơ

Các nhận xét

- Các phần tử θ trong điều kiện (3) và phần tử $-u$ trong điều kiện (4) là duy nhất.
- Các phần tử của V được gọi là véc tơ được ký hiệu bởi các chữ La tinh nhỏ như $u, v, w, \ldots$ Các phần tử của trường K được gọi là các vô hướng và ký hiệu là $h; k; \ldots$ hoặc các chữ Hy Lạp nhỏ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
- Nếu $K = \mathbb{R}$ thì ta gọi V là không gian véc tơ thực, còn nếu $K = \mathbb{C}$ thì ta gọi V là không gian véc tơ phức.
- Ta định nghĩa phép trừ véc tơ bằng công thức sau:$u - v = u + (-v)$.
- Luật phân phối đối với hiệu:$(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$.
- **Quy ước:** Nếu nói đơn thuần là không gian véc tơ, ta hiểu là không gian véc tơ thực.

1.2. Các ví dụ

1. Cho $V = K^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in K\}$ với các phép toán như sau: $\forall u = (x_1, x_2, ..., x_n), v = (y_1, y_2, ..., y_n)$ thì $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ và $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$ là một K-không gian véc tơ.
2. Tập hợp những véc tơ tự do trong mặt phẳng với những phép toán cộng véc tơ và phép nhân véc tơ với một số thực mà chúng ta đã biết trong chương trình toán phổ thông là một không gian véc tơ trên trường số thực.
3. Tập hợp $M(m, n, K)$ với các phép toán cộng ma trận và nhân ma trận với một số tạo thành một không gian véc tơ trên K.
4. Tập hợp $K[x]$ các đa thức một biến với hệ số trên trường K cùng với phép toán cộng đa thức và nhân đa thức với một số K tạo thành một không gian véc tơ trên trường K.
5. Với n là một số nguyên dương, ta đặt tập hợp $P_n[x] = \{f = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n | a_i \in \mathbb{R}\}$ là tập hợp tất cả các đa thức với hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n . Trong đó 2 phép toán là cộng hai đa thức (cộng các hệ số cùng bậc) và nhân đa thức với một số thực (nhân số đó vào tất cả các hệ số của đa thức). Kiểm tra dễ dàng các điều kiện ta thu được là không gian véc tơ trên trường số thực.
6. Gọi $C[a, b]$ là tập hợp tất cả các hàm số liên tục trên đoạn$[a, b]$. Định nghĩa các phép toán trong như sau: Nếu $f(t), g(t) \in C[a, b]$ thì ta đặt $(f + g)(t) = f(t) + g(t); (k.f)(t) = k.f(t)$. và cũng thu được một không gian véc tơ trên trường số thực

1.3. Các tính chất cơ bản của không gian véc tơ

1. $\forall$ véc tơ $v \in V$ ta luôn có $0.v = \theta$.
2. $\forall$ véc tơ $v \in V$ ta luôn có $-v = (-1).v$.
3. $\forall$ véc tơ $v \in V$ và $k \in K$ ta luôn có $(-k).v = k.(-v) = -kv$.
4. $\forall$ véc tơ $k \in K$ ta luôn có $k.\theta = \theta$.
5. Nếu $ku = kv$ và $k \neq 0$ thì $u = v$.
6. Nếu $ku = hu$ và $u \neq \theta$ thì $h = k$.