Bài tập tham khảo
Học phần: Đại số - Mã học phần MI1141.

Chương 1. Tập hợp - Logic - Ánh xạ - Cấu trúc đại số - Số phức

Bài 1. Lập bảng giá trị chân lý của các biểu thức mệnh đề sau

(a) $[A \wedge (B \vee C)] \to C$.

(b) $[\overline{A} \wedge (B \vee C)] \wedge B$.

Bài 2. (CK 20152) Cho p, q là các mệnh đề. Hai mệnh đề $(p \to q) \to q$ và $p \vee q$ có tương đương logic không? Vì sao?

Bài 3. Chứng minh rằng:

(a) $A \leftrightarrow B$ và $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ là tương đương logic.

(b) $(A \to B) \to C$ và $A \to (B \to C)$ không tương đương logic.

(c) $\overline{A \leftrightarrow B}$ và $\overline{A} \leftrightarrow B$ là tương đương logic.

Bài 4 (GK 20171)**.** Cho các mệnh đề A, B và C thỏa mãn $(A \wedge C) \to (B \wedge C)$ và $(A \vee C) \to (B \vee C)$ là các mệnh đề đúng. Chứng minh rằng $A \to B$ là mệnh đề đúng.

Bài 5. Cho mệnh đề logic "Nếu 2020 là số lẻ thì nó chia hết cho 3". Hỏi mệnh đề là đúng hay sai? Giải thích?

Bài 6. Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số f là đơn ánh có thể được xác định bởi mệnh đề "Với mọi x_1, x_2 thuộc tập $\mathbb{R}$, nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$". Hãy dùng các kí hiệu để diễn tả mệnh đề trên và mệnh đề phủ định của nó. Từ đó đưa ra cách chứng minh một hàm số không phải là đơn ánh.

Bài 7. Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Kí hiệu các tập hợp sau:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}.$$

Biểu diễn tập nghiệm phương trình sau qua hai tập hợp A, B :

(a) $f(x)g(x) = 0$.

(b) $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$.

Bài 8 (GK20141)**.** Cho các tập hợp $A = [3; 6), B = (1; 5), C = [2; 4]$. Xác định tập hợp $(A \cap B) \backslash C$.

Bài 9. Cho A, B, C, D là các tập hợp bất kì, chứng minh:

(a) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$.

(b) $A \cup (B \backslash A) = A \cup B$.

(c) $(A \backslash B) \cap (C \backslash D) = (A \cap C) \backslash (B \cup D)$ (GK20151).

Bài 10. Cho hai ánh xạ

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

(a) Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh. Tìm $g(\mathbb{R})$.

(b) Xác định ánh xạ $h = g \circ f$.

Bài 11. Chứng minh các tính chất của ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ $f : X \to Y$

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; $A, B \subset X$.

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; $A, B \subset X$. Nêu ví dụ chứng tỏ điều ngược lại không đúng.

(c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; $A, B \subset Y$.

(d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$; $A, B \subset Y$.

(e) $f^{-1}(A\backslash B) = f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$; $A, B \subset Y$.

Bài 12. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2+4x-5, \forall x \in \mathbb{R}$, và $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 3\}$. Xác định các tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(A)$.

Bài 13 (CK 20161)**.** Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$ và tập

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}.$$

Xác định các tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(A)$.

Bài 14 (GK 20171)**.** Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, xác định bởi $f(x; y) = (x^2 - y; x + y)$. Ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

Bài 15. Cho tập $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ được trang bị luật hợp thành như sau: với $a, b \in \mathbb{Z}_4$, ta có

$$a * b = (a + b) \bmod 4.$$

(a) Chứng minh rằng $*$ là một phép toán đóng trên $\mathbb{Z}_4$.

(b) Hỏi $(\mathbb{Z}_4, *)$ có phải là một nhóm không?

Bài 16. Cho $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ là tập các ánh xạ từ $\mathbb{R}\backslash\{0; 1\} \to \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$ xác định như sau:

$$f_1(x) = x; f_2(x) = \frac{1}{1-x}; f_3(x) = 1 - \frac{1}{x}; f_4(x) = \frac{1}{x}; f_5(x) = 1 - x; f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

(a) Tính $f_1 \circ f_2$.

(b) Lập bảng để biểu diễn giá trị $f_i \circ f_j$ với mọi $i, j = \overline{1, 6}$.

(c) Chứng minh G cùng với phép toán tích ánh xạ lập thành một nhóm không Abel.

Bài 17. Nêu rõ các tập sau với các phép toán cộng và nhân thông thường có lập thành một vành, trường không?

(a) Tập các số nguyên lẻ.

(b) Tập các số nguyên chẵn.

(c) Tập các số hữu tỉ.

(d) $X = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(e) $Y = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Bài 18. Viết các số phức sau dưới dạng chính tắc:

(a) $(1+i\sqrt{3})^9$.

(b) $\dfrac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}}$.

(c) $(2+i\sqrt{12})^5(\sqrt{3}-i)^{11}$.

Bài 19. Tìm các căn bậc 8 của số phức: $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Bài 20. Tìm nghiệm phức của phương trình sau:

(a) $z^2 + z + 1 = 0$.

(b) $z^2 + 2iz - 5 = 0$.

(c) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$.

(d) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$.

(e) $\overline{z^7} = \dfrac{1024}{z^3}$.

(f) $z^8(\sqrt{3}+i) = 1 - i$.

(g) $iz^2 - (1+8i)z + 7 + 17i = 0$ (GK 20171).

Bài 21 (GK 20141)**.** Cho $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{2014}$ là các căn bậc 2014 phân biệt phức của đơn vị 1. Tính

$$A = \sum_{i=1}^{2014} \epsilon_i^2.$$

Bài 22. Cho phương trình $\dfrac{(x+1)^9 - 1}{x} = 0$.

(a) Tìm các nghiệm của phương trình trên.

(b) Tính môđun của các nghiệm.

(c) Tính tích của các nghiệm, từ đó tính $\prod\limits_{k=1}^{8} \sin\frac{k\pi}{9}$.

Bài 23 (CK 20161)**.** Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = iz^2 + (4-i)z - 9i$, với i là đơn vị ảo. Xác định $f^{-1}(\{7\})$.

Bài 24 (GK 20171)**.** Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + ai = 0$, với a là một số thực và i là đơn vị ảo. Tìm a biết $|z_1^2 - z_2^2| = 1$.

Chương 2. Ma trận - Định thức - Hệ phương trình

Bài 1. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Trong các phép toán sau: BC^T, $A + BC, A^TB - C, A(BC), (A+3B)C^T$, phép toán nào thực hiện được. Nếu thực hiện được cho biết kết quả.

Bài 2 (CK 20152)**.** Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ và E là ma trận đơn vị cấp 2.

(a) Tính $F = A^2 - 3A$.

(b) Tìm ma trận X thỏa mãn $(A^2 + 5E)\, X = B^T\,(3A - A^2)$.

Bài 3. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ và hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Tính $f(A)$.

Bài 4. Tính A^n, với

(a) $A = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

Bài 5. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thoả mãn:

(a) $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 6. (a) Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thoả mãn phương trình sau:

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0.$$

(b) Chứng minh với A là ma trận vuông cấp 2 thì: $A^k = 0, (k > 2) \Leftrightarrow A^2 = 0$.

Bài 7. Không khai triển định thức mà dùng các tính chất của định thức để chứng minh:

(a) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

(b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

Bài 8. Tính các định thức sau:

(a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}$.

(b) $B = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & a^2+c^2 \end{vmatrix}$.

(c) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

Bài 9. (a) Chứng minh nếu A là ma trận phản xứng cấp n lẻ thì $\det(A) = 0$.

(b) Cho A là ma trận vuông cấp 2019. Chứng minh $\det\left(A - A^T\right) = 0$.

Bài 10. Tìm hạng của các ma trận sau:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$. (b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$.

Bài 11 (GK 20141)**.** Tìm m để hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & m \end{bmatrix}$ bằng 2 .

Bài 12. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$. (b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$. (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 13 (GK 20151)**.** Tìm a để ma trận $A = \begin{bmatrix} a+1 & -1 & a \\ 3 & a+1 & 3 \\ a-1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$ khả nghịch.

Bài 14. Chứng minh rằng ma trận A vuông cấp n thoả mãn

$$a_k A^k + a_{k-1}\ A^{k-1} + \ldots + a_1\ A + a_0 E = 0, (a_0 \neq 0)$$

thì A là ma trận khả nghịch.

Bài 15. Cho $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & 12 & 10 \\ 6 & 16 & 7 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $AX + B = C^T$.

Bài 16. Giải hệ phương trình sau:

(a) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ 10x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -10. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

Bài 17. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

(a) $\begin{cases} x+2y & -z & +3t=12 \\ 2x+5y & -z & +11t=49 \\ 3x+6y & -4z & +13t=49 \\ x+2y & -2z & +9t=33. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=-4 \\ x+2y+4z+2t=-3 \\ x+2y+2z+7t=-6. \end{cases}$

Bài 18 (GK 20171)**.** Tìm a để hệ $\begin{cases} (a+5)x+3y+(2a+1)z & =0 \\ ax+(a-1)y+4z & =0 \\ (a+5)x+(a+2)y+5z & =0 \end{cases}$ có nghiệm không tầm thường.

Bài 19. (CK 20172). Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx_1+2x_2-x_3=3 \\ x_1+mx_2+2x_3=4 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Bài 20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+mx_4=4 \\ -x_1-x_2+3x_3+2x_4=k \\ 2x_1-x_2-3x_3+(m-1)x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3+2mx_4=5. \end{cases}$

(a) Giải hệ phương trình khi $m=2, k=5$.

(b) Tìm điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất.

(c) Tìm điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Chương 3. Không gian véctơ

Bài 1. Tập V với các phép toán có phải là không gian véctơ không?

(a) $V=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$ với các phép toán xác định như sau

$$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$$
$$k(x,y,z)=(|k|x,|k|y,|k|z).$$

(b) $V=\{(x_1,x_2) \mid x_1>0, x_2>0\}\subset\mathbb{R}^2$ với các phép toán xác định như sau:

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_2) \text{ và}$$
$$k\,(x_1,x_2)=\left(x_1^k,x_2^k\right),$$

trong đó k là số thực bất kỳ.

Bài 2. Chứng minh các tập hợp con của các không gian véctơ quen thuộc sau là các không gian véctơ con của chúng:

(a) Tập $E=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x_1-5x_2+3x_3=0\}$.

(b) Tập các đa thức có hệ số bậc nhất bằng 0 (hệ số của x) của KGVT $P_n[x]$.

(c) Tập các ma trận tam giác trên của tập các ma trận vuông cấp n.

(d) Tập các ma trận đối xứng của tập các ma trận vuông cấp n.

(e) Tập các ma trận phản xứng của tập các ma trận vuông cấp n $(a_{ij} = -a_{ji})$.

Bài 3. Cho $V_1,\ V_2$ là hai không gian véctơ con của KGVT V. Chứng minh:

(a) $V_1 \cap V_2$ là KGVT con của V.

(b) Cho $V_1 + V_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$ là KGVT con của V.

Bài 4. Cho $V_1,\ V_2$ là hai không gian véctơ con của KGVT V. Ta nói $V_1,\ V_2$ là bù nhau nếu $V_1 + V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \{\emptyset\}$. Chứng minh rằng $V_1,\ V_2$ bù nhau khi và chỉ khi mọi véctơ u của V có biểu diễn duy nhất dưới dạng $u = u_1 + u_2, (u_1 \in V_1, u_2 \in V_2)$.

Bài 5. Trong KGVT V, cho hệ véctơ $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}\}$ là phụ thuộc tuyến tính và $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Chứng minh u_{n+1} là tổ hợp tuyến tính của các véctơ $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Bài 6. Cho $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là hệ sinh của $W_1, \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là hệ sinh của W_2, với W_1 và W_2 là các không gian con của V. Chứng minh $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là hệ sinh của $W_1 + W_2$.

Bài 7. Trong $\mathbb{R}^3$ xét xem các hệ véctơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

(a) $v_1 = (4; -2; 6), v_2 = (-6; 3; -9)$.

(b) $v_1 = (2; 3; -1), v_2 = (3; -1; 5), v_3 = (-1; 3; -4)$.

(c) $v_1 = (1; 2; 3), v_2 = (3; 6; 7), v_3 = (-3; 1; 3), v_4 = (0; 4; 2)$.

Bài 8. Trong không gian $P_2[x]$, xét xem hệ véctơ $B = \{u_1 = 1 + 2x, u_2 = 3x - x^2, u_3 = 2 - x + x^2\}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

Bài 9. Trong $\mathbb{R}^3$, chứng minh $v_1 = (1; 1; 1), v_2 = (1; 1; 2), v_3 = (1; 2; 3)$ lập thành một cơ sở. Xác định ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở trên và tìm toạ độ của $x = (6; 9; 14)$ đối với cơ sở trên theo hai cách trực tiếp và dùng công thức đổi tọa độ.

Bài 10. Trong các trường hợp sau, chứng minh $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm $[v]_B$ biết rằng:

(a) $v_1 = (2; 1; 1), v_2 = (6; 2; 0), v_3 = (7; 0; 7), v = (15; 3; 1)$.

(b) $v_1 = (0; 1; 1), v_2 = (2; 3; 0), v_3 = (1; 0; 1), v = (2; 3; 0)$.

Bài 11. Tìm cơ sở và số chiều của KGVT sinh bởi hệ véctơ sau:

(a) $v_1 = (2; 1; 3; 4), v_2 = (1; 2; 0; 1), v_3 = (-1; 1; -3; 0)$ trong $\mathbb{R}^4$.

(b) $v_1 = (2; 0; 1; 3; -1), v_2 = (1; 1; 0; -1; 1), v_3 = (0; -2; 1; 5; -3), v_4 = (1; -3; 2; 9; -5)$ trong $\mathbb{R}^5$.

Bài 12. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véctơ : $v_1 = (1; 0; 1; 0), v_2 = (0; 1; -1; 1), v_3 = (1; 1; 1; 2), v_4 = (0; 0; 1; 1)$. Đặt $V_1 = \text{span}\{v_1, v_2\}, V_2 = \text{span}\{v_3, v_4\}$. Tìm cơ sở và số chiều của các KGVT $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

Bài 13. Trong $P_3[x]$ cho các véctơ $v_1 = 1, v_2 = 1 + x, v_3 = x + x^2, v_4 = x^2 + x^3$.

(a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là một cơ sở của $P_3[x]$.

(b) Tìm tọa độ của véctơ $v = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$ đối với cơ sở trên.

(c) Tìm tọa độ của véctơ $v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ đối với cơ sở trên.

Bài 14 (CK 20151)**.** Trong $\mathbb{R}^4$, cho các véctơ

$$u_1 = (1; 3; -2; 1), u_2 = (-2; 3; 1; 1), u_3 = (2; 1; 0; 1), u = (1; -1; -3; m).$$

Tìm m để $u \in \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

Bài 15. Cho KGVT $P_3[x]$ và hệ véctơ sau

$$v_1 = 1 + x^2 + x^3, v_2 = x - x^2 + 2x^3, v_3 = 2 + x + 3x^3 v_4 = -1 + x - x^2 + 2x^3.$$

(a) Tìm hạng của hệ véctơ.

(b) Tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Bài 16 (CK 20151)**.** Cho không gian $P_{2015}[x]$ các đa thức bậc không quá 2015 và tập

$$W_1 = \{p \in P_{2015}[x] \mid p(-x) = p(x), \forall x \in R\}.$$

Chứng minh rằng W_1 là không gian con của $P_{2015}[x]$. Chỉ ra số chiều và một cơ sở của W_1 (không cần chứng minh).

Bài 17. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất sau:

(a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

Bài 18. Cho U, V là các không gian hữu hạn chiều. Chứng minh

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

Chương 4. Ánh xạ tuyến tính

Bài 1. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_3)$.

(a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

(b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.

(c) Tìm một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$.

Bài 2. Cho ánh xạ $f : P_2[x] \to P_4[x]$ xác định như sau: $f(p) = p + x^2p, \forall p \in P_2[x]$

(a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

(b) Tìm ma trận của đối với cặp cơ sở chính tắc $E_1 = \{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $P_4[x]$.

(c) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở $E_1' = \{1 + x, 2x, 1 + x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $P_4[x]$.

Bài 3 (CK 20151)**.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn:

$$f\left(1 - x^2\right) = -3 + 3x - 6x^2, f\left(3x + 2x^2\right) = 17 + x + 16x^2, f\left(2 + 6x + 3x^2\right) = 32 + 7x + 25x^2.$$

(a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f\left(1 + x^2\right)$.

(b) Xác định m để véctơ $v = 1 + x + mx^2$ thuộc $\operatorname{Im} f$.

Bài 4. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3\right)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = \{v_1 = (1; 0; 0), v_2 = (1; 1; 0), v_3 = (1; 1; 1)\}$.

Bài 5 (CK 20151)**.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn:

$$f\left(1 - x^2\right) = -3 + 3x - 6x^2, f\left(3x + 2x^2\right) = 17 + x + 16x^2, f\left(2 + 6x + 3x^2\right) = 32 + 7x + 25x^2.$$

(a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f\left(1 + x^2\right)$.

(b) Xác định m để véctơ $v = 1 + x + mx^2$ thuộc $\operatorname{Im} f$.

Bài 6. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận của axtt $f : P_2[x] \to P_2[x]$ đối với cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ trong đó: $v_1 = 3x + 3x^2, v_2 = -1 + 3x + 2x^2, v_3 = 3 + 7x + 2x^2$.

(a) Tìm $f\left(v_1\right), f\left(v_2\right), f\left(v_3\right)$.

(b) Tìm $f\left(1 + x^2\right)$.

Bài 7. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ đối với cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ của $\mathbb{R}^4$ và $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ trong đó :

$$v_1 = (0; 1; 1; 1), v_2 = (2; 1; -1; -1), v_3 = (1; 4; -1; 2), v_4 = (6; 9; 4; 2) \text{ và}$$
$$u_1 = (0; 8; 8), u_2 = (-7; 8; 1), u_3 = (-6; 9; 1).$$

(a) Tìm $\left[f\left(v_1\right)\right]_{\mathcal{B}'}, \left[f\left(v_2\right)\right]_{\mathcal{B}'}, \left[f\left(v_3\right)\right]_{\mathcal{B}'}, \left[f\left(v_4\right)\right]_{\mathcal{B}'}$.

(b) Tìm $f\left(v_1\right), f\left(v_2\right), f\left(v_3\right), f\left(v_4\right)$.

(c) Tìm $f(2; 2; 0; 0)$.

Bài 8. Cho toán tử tuyến tính trên $P_2[x]$ xác định bởi:

$$f(1 + 2x) = -19 + 12x + 2x^2; f(2 + x) = -14 + 9x + x^2; f\left(x^2\right) = 4 - 2x - 2x^2$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ và tìm $\operatorname{rank}(f)$.

Bài 9. Cho V, V' là 2 KGVT n chiều và $f : V \to V'$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh các khẳng định sau tương đương:

(a) f là đơn ánh. (b) f là toàn ánh. (c) f là song ánh.

Bài 10 (CK 20141)**.** Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f\left(x_1; x_2; x_3\right) = \left(x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 + x_2 - x_3; mx_1 - x_2 + x_3\right),$$

với m là tham số. Xác định ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và tìm m để f là một toàn ánh.

Bài 11. Tìm các giá trị riêng và cơ sở không gian riêng của các ma trận:

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

Bài 12. Cho biến đổi tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ xác định như sau:

$$f\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)\,x + (a_0 - 2a_2)\,x^2.$$

(a) Tìm các trị riêng của f.

(b) Tìm các véctơ riêng ứng với các trị riêng tìm được.

Bài 13. Tìm ma trận P làm chéo hóa A và xác định $P^{-1}AP$ khi đó với:

(a) $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Vận dụng tính A^n.

Bài 14. Ma trận A có đồng dạng với ma trận chéo không? Nếu có, tìm ma trận chéo đó:

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 15. Tìm cở sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}3$ có dạng chéo trong đó

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$.

(b) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_2, -x_1 + x_2 + 2x_3)$.

Bài 16 (CK 20172)**.** Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(1; 2; -1) = (4; -2; -6), f(1; 1; 2) = (5; 5; 0), f(1; 0; 0) = (1; 2; 1)$$

(a) Tìm m để $u = (6; -3; m) \in \operatorname{Im}(f)$.

(b) Tìm các giá trị riêng và véctơ riêng của f.

Bài 17. Cho $f : V \to V$ là toán tử tuyến tính. Giả sử $f^2 = f \circ f : V \to V$ có giá trị riêng λ^2. Chứng minh một trong 2 giá trị λ hoặc $-\lambda$ là giá trị riêng của f.

Bài 18 (CK 20161)**.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -10 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.

(a) Tính $f\left(1+x+x^2\right)$. Tìm m để $v=1-x+mx^2$ thuộc Ker$f$.

(b) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo.

Bài 19. Cho A là ma trận kích thước $m\times n, B$ là ma trận kích thước $n\times p$. Chứng minh

$$\operatorname{rank}(AB)\le \min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\},$$

với rank(A) kí hiệu là hạng của ma trận A.

Chương 5. Dạng song tuyến tính, dạng toàn phương, không gian Euclide, đường mặt bậc hai

Bài 1. Cho f là dạng song tuyến tính trên không gian véctơ 3 chiều V có ma trận đối với cơ sở $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,u_3\}$ là $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-2&0&-2\\3&4&5\end{bmatrix}$. Cho $h:V\to V$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận đối với cơ sở $\mathcal{B}$ là $B=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-3&-4&2\\1&-2&-3\end{bmatrix}$.

(a) Xác định $f\left(u_1;u_3\right);f\left(u_1-u_2+u_3,2u_1+3u_2-u_3\right)$.

(b) Chứng minh ánh xạ $g(u,v)=f(u,h(v))$ là dạng song tuyến tính trên V. Tìm ma trận của nó đối với cơ sở $\mathcal{B}$.

Bài 2. Cho dạng song tuyến tính trên $P_2[x]$ xác định bởi $f(p(x),q(x))=p(1)q(2)$. Tìm ma trận và biểu thức của f đối với cơ sở chính tắc.

Bài 3. Trên $\mathbb{R}^3$ cho các dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ:

$$\omega_1\left(x_1,x_2,x_3\right)={x_1}^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3\quad\text{và}\quad\omega_2\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1x_2+4x_1x_3+x_2x_3.$$

(a) Bằng phương pháp Lagrange, đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

(b) Xét xem các dạng toàn phương xác định dương, xác định âm không?

Bài 4. Xác định a để các dạng toàn phương xác định dương:

(a) $5x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

(b) $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3$.

(c) $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

Bài 5. Cho dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$\left\langle\left(x_1,x_2,x_3\right),\left(y_1,y_2,y_3\right)\right\rangle=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+ax_2y_2-2x_2y_3-2x_3y_2+3x_3y_3,$$

(a là tham số). Tìm ma trận của dạng song tuyến tính trên đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và tìm điều kiện của a để dạng song tuyến tính là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$.

Bài 6. Trong $\mathbb{R}^3$ trang bị một dạng song tuyến tính như sau:

$$f(x,y) = (x_1,x_2,x_3)\,A\,(y_1,y_2,y_3)^t \text{ với: } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & a^2 & 2a \end{bmatrix} \text{ và } x = (x_1,x_2,x_3)\,, y = (y_1,y_2,y_3).$$

Xác định a để $f(x,y)$ là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$.

Bài 7. Giả sử V là KGVT n chiều với cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Với u, v là các véctơ của V ta có $u = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n; v = b_1e_1 + b_2e_2 + \ldots + b_ne_n$. Đặt $\langle u, v\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

(a) Chứng minh $\langle u, v\rangle$ là một tích vô hướng trên V.

(b) Áp dụng cho trường hợp $V = \mathbb{R}^3$, với $e_1 = (1;0;1), e_2 = (1;1;-1), e_3 = (0;1;1), u = (2;-1;-2), v = (2;0;5)$. Tính $\langle u, v\rangle$.

(c) Áp dụng cho trường hợp $V = P_2[x]$, với $\mathcal{B} = \{1;x;x^2\}\,, u = 2+3x^2, v = 6-3x-3x^2$. Tính $\langle u, v\rangle$.

(d) Áp dụng cho trường hợp $V = P_2[x]$, với $\mathcal{B} = \{1+x;2x;x-x^2\}\,, u = 2+3x^2, v = 6-3x-3x^2$. Tính $\langle u, v\rangle$.

Bài 8. Xét không gian $P_3[x]$. Kiểm tra các dạng $\langle p, q\rangle$ sau có phải là tích vô hướng hay không?

(a) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

(b) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.

(c) $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

Trong trường hợp là tích vô hướng tính $\langle p, q\rangle$ với $p = 2-3x+5x^2-x^3, q = 4+x-3x^2+2x^3$.

Bài 9. Cho V là không gian Euclide. Chứng minh:

(a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

(b) $u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2, \forall u, v \in V$.

Bài 10. Cho cơ sở $\mathcal{B} = \{(1;1;-2),(2;0;1),(1;2;3)\}$ trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc. Trực giao hóa Gram-Schmidt cơ sở $\mathcal{B}$ để thu được cơ sở trực chuẩn $\mathcal{B}'$ và tìm tọa độ của véctơ $u = (5;8;6)$ đối với cơ sở $\mathcal{B}'$.

Bài 11. Cho $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc. Cho $u_1 = (6;3;-3;6), u_2 = (5;1;-3;1)$. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian sinh bởi $\{u_1, u_2\}$.

Bài 12. Trong $P_2[x]$ định nghĩa tích vô hướng $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ với $p, q \in P_2[x]$.

(a) Trực chuẩn hoá Gram - Schmidt cơ sở $\mathcal{B} = \{1;x;x^2\}$ để nhận được cơ sở trực chuẩn $\mathcal{A}$.

(b) Xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{A}$.

(c) Tìm $[r]_{\mathcal{A}}$ biết $r = 2-3x+3x^2$.

Bài 13. Tìm hình chiếu trực giao của véctơ u lên không gian sinh bởi véctơ v:

(a) $u = (1;3;-2;4), v = (2;-2;4;5)$.

(b) $u = (4;1;2;3;-3), v = (-1;-2;5;1;4)$.

Bài 14. Cho không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc và các véctơ

$$u = (3;-2;1), v_1 = (2;2;1), v_2 = (2;5;4).$$

Đặt $W = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$. Xác định hình chiếu trực giao của véctơ u lên không gian W.

Bài 15 (CK 20161)**.** Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho các véctơ

$$u = (1; 2; -1), v = (3; 6; 3)$$

và đặt $H = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w \perp u\}$.

(a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H.

(b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H.

Bài 16. Trong $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các véctơ

$$v_1 = (1; 1; 0; 0; 0), v_2 = (0; 1; -1; 2; 1), v_3 = (2; 3; -1; 2; 1).$$

Gọi $V = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x \perp v_i, i = 1; 2; 3\}$

(a) Chứng minh V là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^5$.

(b) Tìm $\dim V$.

Bài 17. Cho V_1 là không gian con m chiều của không gian Euclide n chiều V. Gọi

$$V_2 = \{x \in V \mid x \perp v, \forall v \in V_1\}.$$

(a) Chứng minh V_2 là không gian véctơ con của V.

(b) Chứng minh V_1 và V_2 bù nhau.

(c) Tìm $\dim V_2$.

Bài 18. Chéo hoá trực giao các ma trận sau

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Bài 19. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao

(a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$.

(b) $7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

Bài 20. Nhận dạng đường cong phẳng sau:

(a) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0.$

(b) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0.$

(c) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$

(d) $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 24.$

Bài 21. Nhận dạng các mặt bậc 2 sau:

(a) ${x_1}^2 + {x_2}^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 4.$

(b) $5x^2 + y^2 + z^2 - 6xy + 2xz - 2xy = 1.$

(c) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = 16.$

Bài 22. Cho $Q(x_1, x_2, x_3) = 9{x_1}^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$. Tìm

$$\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=16}{Max} Q(x_1, x_2, x_3) \text{ và } \underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=16}{Min} Q(x_1, x_2, x_3).$$

Với giá trị nào thì $Q(x_1, x_2, x_3)$ đạt max, min.

Bài 23. Cho A, B là các ma trận vuông đối xứng cấp n có các trị riêng đều dương. Chứng minh $A + B$ cũng có các trị riêng dương.