Chương 2
MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

Chương 2

Chương 2 giới thiệu cho các bạn sinh viên các kiến thức về ma trận, định thức và hệ phương trình tuyến tính. Chúng cung cấp các công cụ hữu hiệu giúp chúng ta tìm hiểu nội dung của các chương tiếp theo.

Nội dung Chương 2 bao gồm:

1. Ma trận và các phép toán
2. Định Thức
3. Ma trận nghịch đảo
4. Hạng của ma trận
5. Hệ phương trình tuyến tính

Trong chương này, $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$.

5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm hệ phương trình tuyến tính, các dạng của hệ phương trình tuyến tính, hệ Cramer, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm và phương pháp Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính.
- Kĩ năng: Sinh viên thành thạo giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss, Gauss-Jordan, hiểu và sử dụng được các tính chất của các hệ đặc biệt.

Nội dung

5.1 Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1}$$

trong đó $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ là các số cho trước và $x_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$ là các ẩn.

- Các số a_{ij} gọi là các hệ số, các số b_i gọi là các hệ số tự do của hệ phương trình (1).
- Dạng (1) gọi là dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính.
- Nếu $b_i = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, m$ thì hệ (1) gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Chú ý

Trong hệ phương trình (1), a_{ij} là hệ số của phương trình thứ i và ẩn x_j với mọi $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

5.1 Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

Nghiệm của hệ phương trình (1) là các bộ số $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n$ sao cho khi thay $x_j = t_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ vào các phương trình của hệ, ta được các đồng nhất thức trên $\mathbb{K}$.

Ví dụ 1

Hệ $\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +5x_4 = 9 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 = -2 \\ -x_1 & & +3x_3 & +2x_4 = 5 \end{cases}$ là hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất, có 3 phương trình và 4 ẩn số. Bộ số $(-1, 1, 0, 2)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

5.1 Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ phương trình tuyến tính (1).

Ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ gọi là ma trận hệ số.

Ma trận cột $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ gọi là cột hệ số tự do.

Ma trận $\overline{A} = [A|B] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ gọi là ma trận bổ sung. Ma trận $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ gọi là cột ẩn số.

Khi đó, hệ phương trình (1) có thể viết dưới dạng

$$AX = B. \tag{2}$$

Phương trình (2) gọi là dạng ma trận của hệ (1).

5.1 Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

Chú ý

Các phần tử trên hàng thứ i của ma trận bổ sung $\overline{A}$ là các hệ số của phương trình thứ i của hệ phương trình $AX = B$ và ngược lại. Do đó, khi cố định tên các biến, ta có sự tương ứng 1-1 (tức là tồn tại một song ánh) giữa tập hợp các ma trận bổ sung và tập hợp các hệ phương trình tuyến tính.

Ví dụ 2

Xét hệ

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +5x_4 = 9 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 = -2 \\ & -x_2 & +3x_3 & +2x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ma trận bổ sung $\overline{A} = [A|B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$

5.2 Hệ phương trình Cramer

Định nghĩa

Hệ phương trình $AX = B$ gọi là hệ Cramer nếu A là ma trận vuông và $\det(A) \neq 0$.

Định lý

Hệ phương trình Cramer $AX = B$ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định bởi công thức $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, j = 1, 2, \ldots, n$, với A_j là ma trận nhận được từ ma trận A bằng cách thay cột j của A bởi cột hệ số tự do B.

Ví dụ 3

Chỉ ra hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 & +5x_2 & +x_3 & = 15 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & = -2 \\ -x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = 13 \end{cases}$ *là hệ Cramer và giải nó.*

5.3 Điều kiện có nghiệm - Phương pháp giải

Các phép biến đổi tương đương trên hệ phương trình tuyến tính:

1. Đổi chỗ hai phương trình;
2. Nhân hai vế của một phương trình với một số khác 0.
3. Nhân một phương trình với một số rồi cộng vào phương trình khác.

Nhận thấy các phép biến đổi tương đương trên một hệ phương trình tuyến tính ứng với các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung của hệ đó.

Ví dụ 4

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 11 \\ -x_1 + 4x_2 = 13 \end{cases} \xrightarrow{pt1 \leftrightarrow pt3} \begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 = 11 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \xrightarrow[pt3+3\times pt1 \to pt3]{2\times pt2} \begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 13 \\ 4x_1 + 6x_2 = 22 \\ 13x_2 = 41 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 11 \\ -1 & 4 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{h1 \leftrightarrow h3} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 13 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[h3+3\times h1 \to h3]{2\times h2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 13 \\ 4 & 6 & 22 \\ 0 & 13 & 41 \end{array}\right).$$

Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình tuyến tính có nghiệm

Định lý (*Kronecker-Capelli*)

Hệ phương trình tuyến tính có nghiệm khi và chỉ khi hạng của ma trận hệ số bằng hạng của ma trận bổ sung.

Cụ thể hơn, ta có:

Hệ quả

Cho hệ phương trình tuyến tính n ẩn số $AX = B$. Khi đó

1. $\mathrm{rank}(\overline{A}) \neq \mathrm{rank}(A) \Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.
2. $\mathrm{rank}(\overline{A}) = \mathrm{rank}(A) = n \Leftrightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất.
3. $\mathrm{rank}(\overline{A}) = \mathrm{rank}(A) = r < n \Leftrightarrow$ hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào $(n-r)$ tham số.

Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính

Giải hệ phương trình $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$.

Bước 1: Lập mtr bổ sung $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Bước 2: $\overline{A} = [A|B] \xrightarrow[\text{theo hàng}]{\text{bđsc}} \overline{A}' = [A'|B']$. Xác định $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A'), \operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(\overline{A}')$.

- Nếu $\operatorname{rank}(\overline{A}) \neq \operatorname{rank}(A)$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $\operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(A)$ thì hệ có nghiệm và tiếp tục bước 3.

Bước 3: Viết hệ phương trình tương đương $A'X = B'$ và giải nó.
Trong trường hợp $\operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(A) = r < n$ thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $(n-r)$ tham số. Khi đó, ta sẽ giữ lại r ẩn ứng với r phần tử khác 0 đầu tiên của r hàng của $\overline{A}'$ và coi $(n-r)$ ẩn còn lại là tham số. Ta giải r ẩn theo các tham số.

Ví dụ

Ví dụ 5

Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 3 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & & = -1 \\ 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 4 \end{cases};$

b) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 3 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & & = -1 \\ 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 2 \end{cases};$

c) $\begin{cases} 2x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +7x_4 & = 10 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 6 \\ -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -5x_4 & = -9 \\ 4x_1 & +10x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = 24 \end{cases}.$

Ví dụ 6

Tìm các giá trị của tham số m để hệ sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = m \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & & = -1 \\ 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 2 \end{cases}$$

Phương pháp Gauss - Jordan

Nhận xét

Khi hệ phương trình là hệ Cramer, tức là hệ gồm n phương trình, n ẩn và $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\overline{A}) = n$, thì ma trận $\overline{A}'$ trong phương pháp Gauss có dạng $\overline{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right)$ trong đó ma trận A' tương ứng có dạng tam giác trên với các phần tử chéo $a'_{11}, a'_{22}, \dots, a'_{nn}$ khác 0. Khi đó, ta có thể sử dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để đưa ma trận $\overline{A}'$ về dạng $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t_n \end{array}\right)$ và vì vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Phương pháp giải này gọi là phương pháp Gauss-Jordan.

Ví dụ 7

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +7x_4 & = 10 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 6 \\ -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -5x_4 & = -9 \\ 4x_1 & +10x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = 24 \end{cases}$.

Phương pháp Gauss - Jordan

Chú ý

Khi A là ma trận khả nghịch, bằng việc sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng ta đưa ma trận bổ sung $\overline{A} = [A|B]$ về dạng $[I|B']$ thì B' trở thành nghiệm của hệ phương trình $AX = B$. Điều này cũng đúng khi B không là ma trận cột. Đặc biệt, nếu B là ma trận đơn vị I, thì B' chính là ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A.

5.4 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \tag{3}$$

- Hệ phương trình này có ma hệ số là $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ và ma trận bổ sung là $\overline{A} = [A|\theta]$.
- Nhận thấy, hệ (3) luôn có một nghiệm là $(0, 0, \ldots, 0)$ và nghiệm đó được gọi là nghiệm tầm thường của hệ. Ta cũng luôn có $\operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(A)$.

Chú ý

Khi sử dụng phương pháp Gauss để giải hệ thuần nhất, ta chỉ cần biến đổi ma trận A thay cho việc biến đổi ma trận bổ sung $\overline{A}$.

5.4 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Mệnh đề

Với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (3), ta có

1. Hệ có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) < n$.
2. Hệ chỉ có nghiệm tầm thường $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n$.

Ví dụ 8

Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường:

$$\begin{cases} (m-1)x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 0 \\ (2m+1)x_1 & +mx_2 & +x_3 & = 0 \\ & -mx_2 & +(m+1)x_3 & = 0 \end{cases}.$$