Chương 5
DẠNG SONG TUYẾN TÍNH, DẠNG TOÀN PHƯƠNG VÀ KHÔNG GIAN EUCLID

[1]

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

[1] Email: sami@hust.edu.vn

Chương 5

Ngoài hai phép toán cơ của không gian véc tơ, ta còn thấy xuất hiện trong thực tế các phép toán khác giữa các véc tơ khi nghiên cứu các trường hợp cụ thể. Trong chương này chúng ta sẽ xem xét các vấn đề trên không gian véc tơ được trang bị thêm tích vô hướng, bên cạnh đó là việc xem xét các dạng song tuyến tính, dạng toàn phương trên không gian véc tơ.

Nội dung Chương 5 bao gồm:

1. Dạng song tuyến tính
2. Dạng toàn phương
3. Không gian Euclid
4. Giới thiệu về đường, mặt bậc hai

1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

Trên $\mathbb{R}$-không gian véc tơ V, khi xem xét các ánh xạ tuyến tính từ V đến $\mathbb{R}$ ta có các dạng tuyến tính. Các ánh xạ từ $V \times V$ đến $\mathbb{R}$ tuyến tính từng biến ta có dạng song tuyến tính. Tổng quát, các anh xạ từ V^n đến $\mathbb{R}$ tuyến tính từng biến ta có dạng đa tuyến tính. Để hiểu hơn về các dạng đa tuyến tính, ta sẽ bắt đầu với dạng song tuyến tính. Một khái niệm gặp rất nhiều ở các không gian véc tơ quen thuộc.

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm dạng song tuyến tính trên một không gian véc tơ, các ví dụ thường gặp và các số liệu tính toán liên quan đến dạng song tuyến tính.
- Kĩ năng: Kiểm tra khái niệm dạng song tuyến tính, xác định ma trận và biểu thức của dạng song tuyến tính.

Nội dung

1.1 Khái niệm dạng song tuyến tính

1.2 Ví dụ

1.3 Ma trận và biểu thức của dạng song tuyến tính

1.1. Khái niệm dạng song tuyến tính

- Cho V là một không gian véc tơ trên trường $\mathbb{R}$. Ánh xạ

$$\begin{aligned} f : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto f(u, v), \end{aligned}$$

được gọi là dạng song tuyến tính trên V nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)\ \forall u, v, w \in V$;
2. $f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v),\ \forall u, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w),\ \forall u, v, w \in V$;
4. $f(u, \lambda v) = \lambda f(u, v),\ \forall u, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Nếu f thỏa mãn thêm điều kiện $f(u, v) = f(v, u),\ \forall u, v \in V$, thì f sẽ được gọi là dạng song tuyến tính đối xứng trên V.

1.2. Các ví dụ

1. Cho $V = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. Ta xét dạng sau:
$$f(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$
là một dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$.
2. Tổng quát, cho $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2 \ldots, y_n)$ và A là một ma trận vuông cấp n. Ta xét dạng sau: $f(x, y) = x^T Ay$ là một dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$.
3. Cho $V = P_n[x]$, $p(x), q(x)$ là hai đa thức của V. Khi đó dạng sau:
$$f(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(2)$$
là một dạng song tuyến tính.
4. Cho $V = P_n[x]$, $p(x), q(x)$ là hai đa thức của V. Khi đó dạng sau:
$$f(p(x), q(x)) = p(0) + q(0)$$
không phải là một dạng song tuyến tính.
5. Cho $V = C_{[a;b]}$ các hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$, $f(x), g(x) \in V$. Khi đó dạng sau:
$$T(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$
là một dạng song tuyến tính.

1.3. Ma trận và biểu thức của dạng song tuyến tính

- **Định nghĩa:** Cho V là một không gian véc tơ hữu hạn chiều có $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V,f là một dạng song tuyến tính trên V. khi đó ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

với $a_{ij} = f(u_i, u_j)$ gọi là *ma trận của dạng song tuyến tính* f đối với cơ sở B.

- **Ví dụ:** Cho $V = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. Ta xét dạng sau:

$$f(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

là một dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$. Ma trận đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.3. Ma trận và biểu thức của dạng song tuyến tính

Cho V là một không gian véc tơ hữu hạn chiều có $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V, f là một dạng song tuyến tính trên V và A là ma trận của f đối với cơ sở B. Với 2 véc tơ bất kỳ $u, v \in V$ ta có tọa độ đối với cơ sở B là

$$[u]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; [v]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$f(u, v) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(u_i, u_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

hay

$$f(u, v) = [u]_B^T . A . [v]_B = x^T A y$$

gọi là biểu thức của dạng song tuyến tính f đối với cơ sở B. Ta thấy rằng khi cho trước cơ sơ B, các dạng song tuyến tính đều có dạng như trên. Các dạng song tuyến tính khác nhau tương ứng với ma trận A khác nhau mà thôi.

Ví dụ

Cho $V = \mathbb{R}^3$ và cơ sở B gồm 3 véc tơ $u_1 = (1; 1; 2), u_2 = (2; -1; 3), u_3 = (0; 2; 1)$. Cho dạng song tuyến tính f có ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

đối với cơ sở B. Khi đó ta có $f(u_2, u_3) = 8; f(u_3, u_1) = 3;$

$$f(2u_1 + u_2 - u_3, u_1 - u_2 + 3u_3) = [2\ 1\ \ -1] \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 33.$$

1.3. Ma trận và biểu thức của dạng song tuyến tính

Trong không gian vectơ V, $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$; $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là 2 cơ sở của V với ma trận chuyển cơ sở từ B_1 sang B_2 là C. Khi đó với 2 véc tơ u, v bất kỳ ta có

$$[u]_{B_1} = C.[u]_{B_2}, [v]_{B_1} = C.[v]_{B_2}.$$

Cho f là dạng song tuyến tính trên V có ma trận lần lượt đối với cơ sở B_1,B_2 là A_1,A_2. Khi đó ta có

$$f(u, v) = [u]_{B_1}^T.A_1.[v]_{B_1} = [u]_{B_2}^T.C^T.A_1.C.[v]_{B_2}.$$

Hay ta có công thức đổi tọa độ

$$A_2 = C^T.A_1.C$$

Ví dụ

Cho $V = \mathbb{R}^2$ và dạng song tuyến tính $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$ và cơ sở $B = \{u_1 = (1;2), u_2 = (3;4)\}$. Hãy xác định ma trận của f đối với cơ sở B.

Lời giải:

Ta có ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ma trận chuyển cơ sở từ E sang B là:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Do đó ma trận của f đối với cơ sở B là:

$$A_2 = C^T A_1 C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 43 \\ 49 & 103 \end{pmatrix}$$