Chương 3
KHÔNG GIAN VÉC TƠ

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

2. KHÔNG GIAN VÉC TƠ CON

Cho trước một không gian véc tơ V, ta xét các tập hợp con U của V mà các phép toán trên V có thể được coi là phép toán trên U (phép toán cảm sinh) và khi đó ta sẽ có khái niệm không gian véc tơ con.

Mục tiêu

- Kiến thức: Nắm được khái niệm không gian véc tơ con.
- Kĩ năng: Thao tác kiểm tra một tập là không gian véc tơ con hay không?

Nội dung

2.1. Định nghĩa không gian véc tơ con

- Cho V là một K-không gian véc tơ và W là một tập con khác rỗng của V. Ta nói tập hợp W đóng kín đối với các phép toán trên V nếu thỏa mãn: $\forall w_1, w_2 \in W; k \in K$ ta luôn có $w_1 + w_2 \in W; kw_1 \in W$.
- Khi đó các phép toán trên V sẽ trở thành các phép toán trên W, gọi là các phép toán cảm sinh từ V lên W.
- Nếu W cùng hai phép toán cảm sinh tạo thành một K-không gian véc tơ thì W gọi là K không gian véc tơ con của V.

Một câu hỏi đặt ra là các phép toán cảm sinh này trên V thì thỏa mãn 8 điều kiện, nhưng trên W thì sao?. Ta có thể chứng minh rằng khi đó các phép toán cảm sinh sẽ thỏa mãn cả 8 điều kiện của khái niệm không gian véc tơ. Nên ta có định lý sau:
Định lý (tiêu chuẩn không gian véc tơ con): W là không gian véc tơ con của V khi và chỉ khi W đóng kín đối với hai phép toán của V.

2.2. Các ví dụ về không gian véc tơ con

Ví dụ 1: Cho không gian véc tơ $V = \mathbb{R}^3$.Khi đó

- $U_1 = \{(x; y; z) | x + y + z = 0\} \subset V$. Khi đó U_1 đóng kín với 2 phép toán cộng, nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ nên U_1 là không gian véc tơ con của V.
- $U_2 = \{(x; y; z) | x + y + z = 1\} \subset V$. Khi đó U_2 không đóng kín với 2 phép toán cộng, nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ ví dụ như $2.(1; 0; 0) = (2; 0; 0) \notin V$ nên U_2 không là không gian véc tơ con của V.
- $U_3 = \{(x; y; z) | x.y.z = 0\} \subset V$. Khi đó U_3 không đóng kín với 2 phép toán cộng, nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ ví dụ như $(1; 0; 0) + (0; 1; 1) = (1; 1; 1) \notin V$ nên U_3 không là không gian véc tơ con của V.
- Cho trước A là ma trận kích thức $m \times 3$ và $U_4 = \{u = (x; y; z) | A.u^T = 0\} \subset V$. Khi đó U_4 đóng kín với 2 phép toán cộng, nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ nên U_4 là không gian véc tơ con của V. Tổng quát cho A là ma trận kích thức $m \times n$ ta luôn có tập nghiệp của 1 hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $A.x = 0$ luôn là một không gian véc tơ con của không gian $\mathbb{R}^n$.

2.2. Các ví dụ về không gian véc tơ con

Ví dụ 2: Cho không gian véc tơ $V = Mat(2;2;\mathbb{R}$.Khi đó

- $U_1 = \{A \in V | det(A) = 0\} \subset V$. Khi đó U_1 không đóng kín với 2 phép toán trên V, ví dụ như
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_1; A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin U_1.$$
Nên U_1 là không gian véc tơ con của V.
- $U_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a = 0\} \subset V$. Khi đó U_2 đóng kín với 2 phép toán trên V nên U_2 là không gian véc tơ con của V.
- $U_3 = \{A \in V | det(A) \neq 0\} \subset V$. Khi đó U_3 không đóng kín với 2 phép toán trên V, ví dụ như
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_3; 0.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin U_3.$$
Nên U_3 không là không gian véc tơ con của V.

2.2. Các ví dụ về không gian véc tơ con

Ví dụ 3: Cho không gian véc tơ $V = P_n[x], n \geq 3$.Khi đó

- $U_1 = P_2[x] \subset V$. Khi đó U_1 đóng kín với 2 phép toán cộng, nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ nên U_1 là không gian véc tơ con của V.
- $U_2 = \{p(x) \in V | p(1) = 0\} \subset V$ (Có nghiệm $x_0 = 1$). Khi đó U_2 đóng kín với 2 phép toán cộng, nhân với vô hướng trên V nên U_2 là không gian véc tơ con của V.
- $U_3 = \{$các đa thức bậc 2$\} \subset V$. Khi đó U_3 không đóng kín với 2 phép toán cộng, nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ ví dụ như
$$(-x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 5x - 3) = 7x - 2 \notin U_3$$
nên U_3 không là không gian véc tơ con của V.

Không gian véc tơ con

Nhận xét:

- Véc tơ không θ của V luôn nằm trong mọi không gian con. Tập chỉ gồm duy nhất véc tơ không là không gian con bé nhất của mọi không gian véc tơ.
- Cho trước các không gian véc tơ con $W_1, W_2, ...$, khi đó ta có:
- Giao $W_1 \cap W_2$ của các không gian con lại là không gian con. Đây là không gian con lớn nhất nằm trong W_1 và W_2. Nhận xét này cũng đúng cho giao tùy ý các không gian con.
- Hợp $W_1 \cup W_2$ của các không gian con chưa chắc đã là không gian con. Ví dụ $W_1 = \{(x;0)|x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{(0;y)|y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ thì $(1,0);(0;1) \in W_1 \cup W_2$ nhưng $(1;0)+(0;1) \notin W_1 \cup W_2$.
- Tổng $W_1 + W_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$ của các không gian con lại là không gian véc tơ con, *tổng các không gian con*. Đây là không gian con bé nhất chứa W_1 và W_2. Đặc biệt khi có thêm điều kiện $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, ta có khái niệm tổng trực tiếp của 2 không gian con, ký hiệu $W_1 \oplus W_2$. Nhận xét vẫn đúng cho trường hợp nhiều các không gian véc tơ.