Chương 3
KHÔNG GIAN VÉC TƠ

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

3. HỆ VÉC TƠ

Cho trước một không gian véc tơ V, ta xét các tập hợp con S của V là một số các véc tơ, có thể chưa là không gian véc tơ con. Ta thực hiện các phép toán trên các véc tơ của S và thu được các tổ hợp tuyến tính của S. Có điều gì đặc biệt với các tổ hợp này?

Mục tiêu

- Kiến thức: Nắm được khái niệm độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính, hệ sinh, ...của hệ các véc tơ.
- Kĩ năng: Thao tác kiểm tra một hệ véc tơ là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính, là hệ sinh hay không?

Nội dung

3.1 Tổ hợp tuyến tính

3.2 Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

3.3 Hệ sinh

3.4 Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

3.1. Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa: Cho V là một K-không gian véc tơ trên trường và $u_1, u_2, ..., u_n$ là các véc tơ của V và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các vô hướng của K. Khi đó véc tơ $w = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdot + x_nu_n$ gọi là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, u_2, ..., u_n$.
Ví dụ: Cho $V = \mathbb{R}^4$, $u_1 = (1; 0; 2; 1), u_2 = (3; 1; 0; -1), u_3 = (4; 1; 1; 2) \in V$. Khi đó $w = v_1 + 2v_2 - v_3 = (3; 1; 1; -3)$ là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.
Nếu xét véc tơ $u = (1; 1; 1; 1) = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ thì tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

Do hệ vô nghiệm nên u không phải là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.
Nhận xét:

- Véc tơ không θ luôn là một tổ hợp tuyến tính của các hệ véc tơ khác (hệ số biểu diễn là 0).
- Tổng của hai hay nhiều tổ hợp tuyến tính lại thu được một tổ hợp tuyến tính.

3.2. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

- **Định nghĩa:** Hệ các véc tơ $u_1, u_2, ..., u_n$ của không gian véc tơ V trên trường K được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại các vô hướng $x_1, x_2, ..., x_n$ củaK thỏa mãn không phải tất cả đều bằng 0 sao cho: $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdot + x_nu_n = \theta$.
  Hệ véc tơ không phụ thuộc tuyến tính được gọi là hệ độc lập tuyến tính.
- **Mở rộng:** Cho S là tập các véc tơ của V (có thể hữu hạn hoặc vô hạn). S gọi là hệ phụ thuộc tuyến tính nếu trong S có hệ các véc tơ $u_1, u_2, ..., u_n$ phụ thuộc tuyến tính. Hệ S không phụ thuộc tuyến tính được gọi là hệ độc lập tuyến tính.
- **Nhận xét:**
  - Hệ các véc tơ $u_1, u_2, ..., u_n$ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại ít nhất 1 hệ số x_i nào đó trong số $x_1, x_2, ..., x_n$ khác không. Giả sử đó là x_n. Khi đó,
  $$u_n = -\frac{x_1}{x_n}u_1 - \frac{x_2}{x_n}u_2 - \cdots - \frac{x_{n-1}}{x_n}u_{n-1}.$$
  Suy ra, nếu các véc tơ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại ít nhất một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.
  - Các véc tơ $u_1, u_2, ..., u_n$ độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu khi $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdot + x_nu_n = \theta$ sẽ kéo theo $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Nói cách khác, hệ phương trình véc tơ $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdot + x_nu_n = \theta$ có nghiệm duy nhất tầm thường là $(0, 0, \ldots, 0)$.

3.2. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ: Trong không gian véc tơ $V = \mathbb{R}^4$, xem xét hệ véc tơ $B = \{u_1 = (1;2;3;4),$ $u_2 = (-1;2;-2;1), u_3 = (0;4;1;5)\}$ là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?
Lời giải Xét $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = \theta$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & = 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = 0 \\ 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \\ 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ta có ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Do $r(A) = 2 < 3$ (số ẩn) nên hệ có nghiệm không tầm thường. Do đó hệ phụ B phụ thuộc tuyến tính.
Chú ý: Khi có các véc tơ trong $\mathbb{R}^n$, ta thành lập ma trận A từ các véc tơ (có thể theo hàng hoặc cột vì đều có hạng như nhau), so sánh hạng ma trận $r(A)$ và số véc tơ:

$r(A) <$ số véc tơ, thì hệ phụ thuộc tuyến tính.

$r(A) =$ số véc tơ, thì hệ độc lập tuyến tính.

3.2. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

1. Điều kiện cần và đủ để hệ các véc tơ phụ thuộc tuyến tính là một trong các véc tơ đó là tổ hợp của các véc tơ còn lại.
2. Trong hệ véc tơ nếu có chứa véc tơ θ thì hệ véc tơ này phụ thuộc tuyến tính.
3. Nếu một phần của họ các véc tơ phụ thuộc tuyến tính thì tất cả các véc tơ của hệ đó đều phụ thuộc tuyến tính.
4. Một hệ độc lập tuyến tính thì một phần của hệ đó cũng độc lập tuyến tính.
5. Hệ một véc tơ $\{v\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $v \neq \theta$.

3.3. Hệ sinh

Các định nghĩa:

- Cho S là một tập con của không gian véc tơ V. Ta có tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính tạo thành một không gian véc tơ con của V. Ta gọi không gian con này là bao tuyến tính của S và ký hiệu là $span(S)$.
- Hệ S được gọi là hệ sinh của V nếu $span(S) = V$.
- Ta gọi S là hệ sinh tối tiểu nếu nó không chứa tập con thực sự cũng là hệ sinh.
- Không gian véc tơ có một hệ sinh hữu hạn được gọi là không gian hữu hạn sinh.
- Quy ước khi $S = \emptyset$ thì $span(S) = \{\theta\}$

3.3. Hệ sinh

Ví dụ:

- Cho $V = \mathbb{R}^n$ thì hệ B gồm các véc tơ $e_1 = (1; 0; 0; \ldots, 0), e_2 = (0; 1; 0; \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0; 0; \ldots, 0; 1)$ làm thành một hệ sinh của V
- Cho $V = P_n[x]$ thì hệ $B_1 = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ và B_2 gồm các véc tơ $u_1 = 1, u_2 = 1 + x, u_3 = 1 + x + x^2, \ldots, u_{n+1} = 1 + x + \cdots + x^n$ là các hệ sinh của V.
- Chứng minh rằng hệ 3 vectơ $u_1 = (1; 1; 2), u_2 = (2; 1; 0), u_3 = (3; -1; 2)$ là hệ sinh của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.
  Lời giải: Lấy véc tơ $u = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ bất kỳ và xét $u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ tương đương với hệ phương trình
  $$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_4 & = b_1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = b_2 \\ 2x_1 & & +2x_3 & = b_3 \end{cases}$$
  Ta có ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ khả nghịch. Nên hệ phương trình luôn có nghiệm. Do đó hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

3.3. Hệ sinh

Nhận xét:

- Khi có các véc tơ trong $\mathbb{R}^n$, ta thành lập ma trận A từ các véc tơ (có thể theo hàng hoặc cột vì đều có hạng như nhau), so sánh hạng ma trận $r(A)$ và n:

  $r(A) < n$, thì hệ không phải là hệ sinh.
  $r(A) = n$, thì hệ là hệ sinh.

- $Span(S)$ là không gian véc tơ con bé nhất của V chứa hệ véc tơ S.
- S là hệ sinh, $S \subset S'$ thì S' cũng là hệ sinh.
- S là hệ sinh, thực hiện biến đổi sơ cấp trên hệ S để thu được hệ S' thì S' cũng là hệ sinh. Lưu ý rằng ta luôn có $Span(S) = Span(S')$
- S là hệ sinh tối tiểu của $Span(S)$ khi và chỉ khi S là hệ độc lập tuyến tính.

3.4. Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất m phương trình, n ẩn

$$AX = \theta,$$

trong đó $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận các hệ số, còn X là ma trận cột của các ẩn $x_1, x_2, ..., x_n$.
Mỗi nghiệm của hệ phương trình thuần nhất trên là một bộ $c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$. Hệ luôn có ít nhất một nghiệm là nghiệm tầm thường nên tập hợp U các nghiệm là một tập khác rỗng. Dễ thấy tổng hai nghiệm của hệ cũng là một nghiệm của hệ và tích của số $k \in \mathbb{R}$ với một nghiệm c cũng là một nghiệm của hệ. Bởi vậy tập U các nghiệm của hệ phương trình thuần nhất tạo thành một không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$.
Ví dụ. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$x_3 = s; x_4 = t; x_2 = 2s - 3t; x_1 = -s + 2t.$$

Nghiệm tổng quát của hệ là

$$(-s + 2t; 2s - 3t; s; t) = s(-1; 2; 1; 0) + t(2; -3; 0; 1) \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Do đó không gian nghiệm của hệ thuần nhất cũng là không gian tuyến tính sinh bởi 2 véc tơ $u_1 = (-1; 2; 1; 0)$, và $u_2 = (2; -3; 0; 1)$.

3.4. Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Tổng quát: Với mọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$AX = \theta,$$

ta tiến hành giải hệ phương trình biểu diễn qua $k = n - r(A)$ tham số

$$x = t_1u_1 + t_2u_2 + \cdots + t_ku_k.$$

Do đó không gian nghiệm

$$U = Span(u_1, u_2, ..., u_k).$$

Hơn thế, các tham số là độc lập nên hệ $B = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ là độc lập tuyến tính.