Chương 3
KHÔNG GIAN VÉC TƠ

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

4. CƠ SỞ VÀ TỌA ĐỘ

Khái niệm cơ sở có thể được hiểu với nhiều các định nghĩa tương đương như hệ sinh độc lập tuyến tính, hệ độc lập tối đại, hệ sinh tối tiểu. Chúng đều được hiểu như là một "hệ quy chiếu" trong không gian véc tơ để mỗi véc tơ khi đối chiếu vào đều cho một tọa độ duy nhất.

Mục tiêu

- Kiến thức: Nắm được khái niệm cơ sở và tọa độ.
- Kĩ năng: Thao tác kiểm tra một hệ véc tơ là cơ sở hay không? Tính toán tọa độ của các véc tơ theo cơ sở, công thức đổi tọa độ khi thay đổi cơ sở.

Nội dung

4.1. Khái niệm cơ sở và tọa độ

Cho V là không gian véc tơ và S là một hệ các tơ của V. Khi đó các khẳng định tương đương:

1. S là hệ sinh độc lập tuyến tính.
2. S là hệ sinh tối tiểu (S không có tập con thực sự nào là hệ sinh).
3. S là hệ độc lập tuyến tính tối đại (S không là tập con thực sự của một hệ độc lập tuyến tính nào khác).
4. Mọi véc tơ của V đều biểu diễn một cách duy nhất qua hệ S.

Hệ S thỏa mãn một trong các khẳng định tương đương trên gọi là một cơ sở của không gian véc tơ V .

Nhận xét:

- Bất kỳ hệ sinh nào của V cũng chứa một cơ sở củaV.
- Bất kỳ hệ độc lập tuyến tính nào cũng có thể bổ sung các vectơ để trở thành cơ sở.
- Cho V là không gian véc tơ hữu hạn sinh với $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một hệ sinh của V và $T = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một hệ độc lập tuyến tính của V. Khi đó $n \leq m$.
- Cho V là không gian véc tơ hữu hạn sinh thì khi đó mọi cơ sở S của V đều có số phần tử hữu hạn.
- Cho V là không gian véc tơ với $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, $T = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là hai cơ sở của V. Khi đó $m = n$.
- **Định nghĩa:** Số phần tử của một cơ sở của không gian véc tơ hữu hạn chiều gọi là chiều của không gian V, ký hiệu $dim(V)$.

Các ví dụ

1. Cho $V = \mathbb{R}^n$, khi đó E gồm các véc tơ $e_1 = (1;0;0;\ldots,0), e_2 = (0;1;0;\ldots,0), \ldots, e_n = (0;0;\ldots,0;1)$ làm thành một cơ sở của V. Cơ sở này gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$, do đó ta có $dim(\mathbb{R}^n) = n$.
2. Cho $V = P_n[x]$ thì hệ E gồm các véc tơ $u_1 = 1; u_2 = x; u_3 = x^2; \ldots; u_{n+1} = x^n$ là một cơ sở của V. Cơ sở này gọi là cơ sở chính tắc của $P_n[x]$,do đó ta có $dim(P_n[x]) = n+1$.
3. Cho $V = Mat(2,2,\mathbb{R})$, khi đó hệ B gồm các véc tơ $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $dim(Mat(2,2,\mathbb{R})) = 4$. làm thành một cơ sở của V. Do đó
4. Cho $V = \mathbb{R}^n$ và hệ B gồm m véc tơ $u_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), u_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \ldots,$ $u_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm})$. Do $dim(\mathbb{R}^n) = n$ nên B là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi $m = n$ và ma trận $A = (a_{ij})$ là một ma trận khả nghịch.

Chú ý: Cho V là một không gian hữu hạn chiều, $dim(V) = n$. Khi đó:

- Mọi hệ vectơ có nhiều hơn n vectơ đều phụ thuộc tuyến tính.
- Mọi hệ có n vectơ độc lập tuyến tính đều là cơ sở của V.
- Mọi hệ có n vectơ là hệ sinh của V đều là cơ sở của V.
- Mọi hệ độc lập tuyến tính có k vectơ đều có thể bổ sung thêm $(n-k)$ vectơ để lập thành một cơ sở của V.

Tọa độ của véc tơ theo cơ sở

- **Định nghĩa:** Cho V là một không gian véc tơ hữu hạn chiều có $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của V (có tính thứ tự các véc tơ trong cơ sơ). Khi đó mọi véc tơ v bất kỳ của V đều biểu diễn duy nhất qua B là: $v = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$. Ta định nghĩa bộ hệ số biểu diễn có thứ tự $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gọi là tọa độ của véc tơ v theo cơ sở B. Nếu viết bộ tọa độ này dưới dạng cột ta dùng ký hiệu $[v]_B$ hay

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- **Chú ý:** Khi xem xét tọa độ của véc tơ theo cơ sở B, thì cơ sở B có xét đến tính thứ tự của các véc tơ trong cơ sở. Khi đổi thứ tự các véc tơ trong cơ sở ta được cơ sở khác, và tọa độ các véc tơ khi đó cũng sẽ thay đổi theo.

Ví dụ về tọa độ

1. Cho $V = \mathbb{R}^n$ và E cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Véc tơ $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ có tọa độ cũng vẫn là bộ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hay
$$[v]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
2. Cho $V = P_n[x]$ và E cơ sở chính tắc của $P_n[x]$. Véc tơ $v = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ có tọa độ với cơ sở E là bộ $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ hay
$$[v]_E = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ddots \\ a_n \end{pmatrix}.$$
3. Cho $V = Mat(2, 2, \mathbb{R})$ và cơ sở B gồm các véc tơ $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$
$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Véc tơ $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ có tọa độ đối với cơ sở B là bộ (a, b, c, d).

Ví dụ về tọa độ

4. Cho $V = \mathbb{R}^3$ và hệ B gồm 3 véc tơ $u_1 = (1;1;2), u_2 = (2;-1;3), u_3 = (0;2;1)$. Do $v = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ nên B là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Với véc tơ $v = (7;3;13)$, ta xét hệ phương trình $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ thu được $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$ nên

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Cho $V = P_3[x]$ và hệ B gồm 4 véc tơ $u_1 = 1, u_2 = 1 + x, u_3 = 1 + x + x^2, u_4 = 1 + x + x^2 + x^3$ là một cơ sở của V. Với véc tơ $v = 3 + 5x - 3x^2 + 4x^3$, ta xét hệ phương trình $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$ thu được $x_1 = -2, x_2 = 8, x_3 = -7, x_4 = 4$ nên

$$[v]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- **Chú ý:** Trong trường hợp tổng quát, việc tìm tọa độ của một véc tơ theo một cơ sở luôn đưa đến việc xem xét một hệ Crame (có nghiệm duy nhất).

4.2. Ma trận tọa độ của hệ véc tơ theo một cơ sở, hạng của hệ véc tơ

Cho V là một không gian véc tơ với $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V.

- **Định nghĩa:**
  - Cho $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một hệ véc tơ của V, khi đó ma trận $A = (a_{ij})$ kích thước $n \times m$ xác định bởi các cột lần lượt là $[v_1]_B, [v_2]_B, \ldots, [v_m]_B$ gọi là ma trận của hệ véc tơ S đối với cơ sở B, ký hiệu là $[S]_B$.
  - Hạng của ma trận A được gọi là hạng của hệ véc tơ S, đây cũng chính là số véc tơ độc lập tuyến tính nhiều nhất của hệ S, ký hiệu $r(S)$. Do đó $r(S) = r(A) = dim(Span(S))$.

- **Ví dụ:** Trong không gian $P_3[x]$, tìm hạng của hệ véc tơ sau
  $B = \{u_1 = 2 + x + x^2, u_2 = x - x^2 + 2x^3, u_3 = 4 + x + 3x^2 - 2x^3\}$.
  Lời giải: Xét $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ là cơ sở chính tắc của $P_3[x]$. Ta có

$$[B]_E = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

  Do đó ta có $r(B) = r(A) = 2$ (sinh viên tìm hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp trên hàng, cột của ma trận A). Đây cũng chính là số chiều của không gian $Span(B)$.

4.3. Ma trận chuyển cơ sở và công thức đổi tọa độ

- **Định nghĩa:** Giả sử trong không gian vectơ V, ngoài cơ sở $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ còn có một cơ sở khác là $B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Khi đó ma trận tọa độ $[B_2]_{B_1}$ của hệ B_2 theo cơ sở B_1 được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ B_1 sang B_2, ký hiệu $C_{B_1 \to B_2}$.
- **Tính chất:**
  - Ma trận chuyển cơ sơ $C_{B_1 \to B_2}$ luôn là một ma trận khả nghịch.
  - Ma trận chuyển cơ sơ $C_{B_2 \to B_1} = (C_{B_1 \to B_2})^{-1}$.
  - Với 3 cơ sở của V là B_1, B_2, B_3 ta có

$$C_{B_1 \to B_3} = C_{B_1 \to B_2} . C_{B_2 \to B_3}$$

- **Công thức đổi tọa độ**

  Cho không gian vectơ V, với hai cơ sở là $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ và $B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Khi đó với véc tơ v bất kỳ của V ta có công thức sau

$$[v]_{B_2} = (C_{B_1 \to B_2})^{-1} . [v]_{B_1}$$

hay

$$[v]_{B_2} = C_{B_2 \to B_1} . [v]_{B_1} .$$

4.3. Ma trận chuyển cơ sở và công thức đổi tọa độ

Ví dụ: Cho $V = \mathbb{R}^3$ và hai cơ sở $E = \{e_1 = (1;0;0), e_2 = (0;1;0), e_3 = (0;0;1)\}$ và $B = \{v_1 = (1;2;1), v_2 = (-1;1;3), v_3 = (3;2;-1)\}$.

(a) Xác định ma trận chuyển cơ sở từ E sang B.

(b) Áp dụng công thức đổi tọa độ để tìm tọa độ của véc tơ $w = (2;9;10)$ đối với cơ sở B.

Lời giải

(a) Ma trận chuyển cơ sở từ E sang B là

$$C_{E\to B} = [B]_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$[w]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.[w]_E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -5 \\ 4 & -4 & 4 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$