Chương 4
ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

Nội dung Chương 4

Nội dung Chương 4

1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính
2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính
3. Trị riêng và véc-tơ riêng

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm ánh xạ tuyến tính và ma trận của ánh xạ tuyến tính, mối quan hệ giữa ma trận và ánh xạ tuyến tính, khái niệm giá trị riêng, véc tơ riêng và ma trận chéo hoá được, toán tử chéo hoá được.
- Kỹ năng: Nhận biết ánh xạ tuyến tính; tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính tương ứng với cặp cơ sở bất kỳ; thực hiện chéo hoá ma trận và toán tử tuyến tính chéo hoá được.

1. KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Nội dung

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Cho V và W là hai không gian véc tơ trên cùng trường số $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ là $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$). Ánh xạ $f : V \to W$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu:

- **i)** $f(u+v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in V,$
- **ii)** $f(ku) = kf(u), \forall k \in \mathbb{K}, u \in V.$

Trong trường hợp $W \equiv V$, ánh xạ tuyến tính $f : V \to V$ còn được gọi là một **toán tử tuyến tính** (hay **phép biến đổi tuyến tính**) của không gian véc tơ V.

Chú ý 0.1

Từ định nghĩa ta dễ dàng suy ra rằng ánh xạ $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi

$$f(ku + lv) = kf(u) + lf(v)$$

$\forall u, v \in V, k, l \in \mathbb{K}.$

1.2 Ví dụ

Các ánh xạ sau là ánh xạ tuyến tính:

1. Ánh xạ không $f: V \to W, f(v) = \theta_W$.
2. Ánh xạ $f: V \to V, f(v) = \alpha v, \alpha \in \mathbb{R}$ là một phép biến đổi tuyến tính. Đặc biệt $\alpha = 1$ thì phép biến đổi này trở thành phép đồng nhất của V, tức là nó giữ nguyên mọi phần tử của V.
3. Phép chiếu $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x, 0)$.
4. Ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 2x + 3y$.
5. Ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + x_3, x_1 + 2x_3).$$
6. Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ánh xạ $f: M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ được xác định bởi
$$f(X) = AX$$
Thật vậy, với mọi X, Y thuộc $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ và $k \in \mathbb{R}$ ta có:
$$f(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY) = f(X) + f(Y),$$
$$f(kX) = A(kX) = f(AX) = kf(X).$$

1.2 Ví dụ

Các ánh xạ sau không là ánh xạ tuyến tính:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + 1, y)$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$.

1.3 Tính chất của ánh xạ tuyến tính

Mệnh đề

Cho V, W là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

1. $f(\theta_V) = \theta_W$,
2. $f(-v) = -f(v), \forall v \in V$,
3. $f(u - v) = f(u) - f(v), \forall u, v \in V$.
4. $f(k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_nu_n) = k_1f(u_1) + k_2f(u_2) + \cdots + k_nf(u_n), \forall u_1, \cdots, u_n \in V; k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$.

1.3 Tính chất của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Giả sử $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{K}$-không gian véc tơ V và $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ là một hệ véc tơ tùy ý của W (chúng có thể không nhất thiết khác nhau). Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ sao cho

$$f(v_i) = w_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Chứng minh

Mỗi vectơ $v \in V$ biểu diễn được duy nhất dưới dạng

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n.$$

Khi đó ta định nghĩa một ánh xạ $f : V \to W$ bởi

$$f(v) = k_1 w_1 + k_2 w_2 + \cdots + k_n w_n.$$

1.3 Tính chất của ánh xạ tuyến tính

Dễ dàng thử lại rằng ánh xạ f định nghĩa như vậy là một ánh xạ tuyến tính. Hơn nữa, trong biểu thức định nghĩa của f với mỗi i cố định ta chọn $k_i = 1$ và $k_j = 0$ nếu $j \neq i$, ta sẽ được

$$f(v_i) = w_i,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Bây giờ nếu $g : V \to W$ cũng là một ánh xạ tuyến tính thỏa mãn $g(v_i) = w_i,\ i = 1, 2, ..., n$, ta sẽ chứng tỏ rằng $g = f$.
Thật vậy, với mọi $v \in V$ ta có

$$\begin{aligned} g(v) &= g(k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n) \\ &= k_1g(v_1) + k_2g(v_2) + ... + k_ng(v_n) \\ &= k_1w_1 + k_2w_2 + ... + k_nw_n = f(v). \end{aligned}$$

1.3 Tính chất của ánh xạ tuyến tính

Các phép toán

Cho V, W là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và f, g là ánh xạ tuyến tính từ $V \to W$. Khi đó

1. *Tổng* của hai ánh xạ này, ký hiệu $f+g$, là ánh xạ $f+g$ xác định bởi
$$(f+g)(v) = f(v) + g(v),\ \forall v \in V.$$
2. Tích của một số $k \in \mathbb{K}$ với ánh xạ tuyến tính f là ánh xạ kf xác định bởi
$$(kf)(v) = kf(v),\ \forall k \in \mathbb{K}, \forall v \in V.$$

Mệnh đề

Cho V, W là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và f, g là ánh xạ tuyến tính từ $V \to W$. Khi đó

1. Tổng $f+g : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính
2. Với $k \in \mathbb{K}$, tích $kf : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính

1.3 Tính chất của ánh xạ tuyến tính

Mệnh đề

Cho V, W là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$. Tập hợp

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \to W | f \text{ tuyến tính}\}$$

cùng hai phép toán trên là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$.

Mệnh đề

Cho V, W, Z là các không gian véc tơ trên trường số $\mathbb{K}$ và các ánh xạ tuyến tính:

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$

Khi đó hợp thành $g \circ f : V \to Z$ cũng là một ánh xạ tuyến tính.

1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

SAMI 1956

Định nghĩa

Cho V, W là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó

$$\text{Ker}f := \{v \in V | f(v) = \theta_W\} = f^{-1}(\{\theta_W\})$$

được gọi là **hạt nhân** của f.

$$\text{Im}f := \{f(v) | v \in V\} = \{w \in W | \exists v \in V, f(v) = w\} = f(V)$$

được gọi là **ảnh** của f.

Ví dụ

Tìm hạt nhân và ảnh của ánh xạ sau:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x, 0)$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 2x + 3y$.

Lời giải

1. Theo định nghĩa
$$\text{Ker} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = (0;0)\}.$$
Ta có $f(x,y) = (0;0) \Leftrightarrow (x,0) = (0;0) \Leftrightarrow x = 0$.
Do đó $\text{Ker} f = \{(0,y), y \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(0,1)\}$.
Theo định nghĩa
$$\text{Im} f = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | \exists\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (a,b).\}$$
Ta có $f(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow (x,0) = (a,b)$.
Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $b = 0$.
Vậy $\text{Im} f = \{(a,0), a \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1,0)\}$.
2. $\text{Ker} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 2x + 3y = 0\} = \{(3t,-2t), t \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(3,-2).\}$
$\text{Im} f = \{a \in \mathbb{R}, \exists\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 2x + 3y = a\}$.
Phương trình $2x + 3y = a$ có nghiệm với mọi a nên $\text{Im} f \equiv \mathbb{R}$.

1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Cho V, W là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

1. $\text{Ker} f$ là một không gian véc tơ con của V.
2. $\text{Im} f$ là một không gian véc tơ con của W.

Chứng minh

1. Lấy u, v bất kỳ thuộc $\text{Ker} f$ ta có $f(u) = f(v) = \theta_W$.
   Với mọi k, l thuộc $\mathbb{R}$ thì
   $$f(ku + lv) = kf(u) + lf(v) = \theta_W.$$
   Do đó $(ku + lv)$ thuộc $\text{Ker} f$.
   Vậy $\text{Ker} f$ là một không gian véc tơ con của V.
2. Lấy u', v' thuộc $\text{Im} f$, khi đó tồn tại u, v thuộc V sao cho $f(u) = u', f(v) = v'$.
   Với mọi k, l thuộc $\mathbb{R}$ thì $f(ku + lv) = ku' + lv'$, do đó $(ku' + lv')$ thuộc $\text{Im} f$.
   Vậy $\text{Im} f$ là một không gian véc tơ con của W.

1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Chú ý

Cho V, W là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Xét hệ véc tơ $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ của V và $f(S) = \{f(v_1), \dots, f(v_m)\}$ của W. Khi đó:

1. Nếu hệ S là phụ thuộc tuyến tính thì hệ $f(S)$ cũng phụ thuộc tuyến tính.
2. Nếu hệ $f(S)$ là độc lập tuyến tính thì hệ S là độc lập tuyến tính.

1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Cho V, W là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Nếu hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_m\}$ của V là một hệ sinh của V thì hệ véc tơ $\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}$ là hệ sinh của Imf. Hơn nữa Imf = span$\{f(v_1), \ldots, f(v_m)$.

Chứng minh Lấy w bất kỳ thuộc Imf, khi đó tồn tại $v \in V$ sao cho $w = f(v)$. Do span$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = V$ nên tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sao cho:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

Từ đó ta có:

$$w = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_m f(v_m).$$

Điều này chứng tỏ Im$f \subset$ span$\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}$. Mặt khác span$\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\} \subset$ Imf. Vậy Imf = span$\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}$.

1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Các bước xác định không gian ảnh Imf

Bước 1. Chọn một hệ sinh (thông thường ta chọn một cơ sở) $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ của V.
Bước 2. Tìm ảnh của B qua f:

$$S = f(B) = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}.$$

Bước 3. Kết luận Imf = span(S) = span$\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$.

Định lý về số chiều

Cho V, W là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ với $\dim V < +\infty$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

$$\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim V$$

Chứng minh

Giả sử $\dim \mathrm{Ker} f = r$ và $\dim \mathrm{Im} f = s$.

Chọn $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ là một cơ sở của $\mathrm{Ker} f$ và chọn $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_s\}$ là một cơ sở của $\mathrm{Im} f$. Khi đó tồn tại các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_s$ thuộc V sao cho $f(v_i) = v'_i, i = \overline{1, s}$.

Ta sẽ chỉ ra hệ véc tơ $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ là một cơ sở của V.

Thật vậy, giả sử:

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_ru_r + l_1v_1 + l_2v_2 + \ldots + l_sv_s = \theta_V, k_i \in \mathbb{R}\, \forall i = \overline{1, r}, l_j \in \mathbb{R}\, \forall j = \overline{1, s} \quad (1)$$

Khi đó

$$f(k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_ru_r + l_1v_1 + l_2v_2 + \ldots + l_sv_s) = \theta_W$$

Suy ra

$$k_1f(u_1) + k_2f(u_2) + \ldots + k_rf(u_r) + l_1f(v_1) + l_2f(v_2) + \ldots + l_sf(v_s) = \theta_W$$

Do $u_1, u_2, \ldots, u_r$ thuộc $\mathrm{Ker} f$ nên $f(u_i) = 0\, \forall i \in \overline{1, r}$. Lại có $f(v_j) = v'_j, j = \overline{1, s}$ nên ta có

$$l_1v'_1 + l_2v'_2 + \ldots + l_sv'_s = \theta_W.$$

1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Chứng minh định lý về số chiều

Vì $v_1', v_2', \ldots, v_s'$ độc lập tuyến tính nên $l_1 = l_2 = \ldots = l_s = 0$. Thay vào (1) ta được:

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_ru_r = \theta_W$$

Mà $u_1, u_2, \ldots, u_r$ cũng độc lập tuyến tính nên $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$. Như vậy từ (1) ta suy ra tất cả các hệ số $k_1, k_2, \ldots, k_r, l_1, l_2, \ldots, l_s$ đều phải bằng 0.
Do đó hệ $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ là độc lập tuyến tính.
Bây giờ ta sẽ chứng minh hệ này là hệ sinh của V. Thật vậy, xét một véc tơ u bất kỳ thuộc V, ta có $f(u)$ thuộc Imf nên tồn tại các hệ số $\alpha_i, i = \overline{1, s}$ sao cho

$$f(u) = \alpha_1v_1' + \alpha_2v_2' + \ldots + \alpha_sv_s'.$$

Do $f(v_i) = v_i', i = \overline{1, s}$ nên

$$f(u) = \alpha_1f(v_1) + \alpha_2f(v_2) + \ldots + \alpha_sf(v_s)$$

Từ đó ta có $f(u - (\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_sv_s)) = \theta$. Vậy $(u - (\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_sv_s))$ thuộc Ker$f$.
Mặt khác $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ là một cơ sở của Ker$f$ nên tồn tại các hệ số $\beta_j, j = \overline{1, r}$ sao cho

$$u - (\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_sv_s) = \beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \ldots + \beta_ru_r$$

Như vậy u được biểu diễn qua hệ $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s\}$:

$$u = \beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \ldots + \beta_ru_r + \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_sv_s.$$

1.5 Hạng của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho V, W là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$, $\dim V < \infty$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Số chiều của không gian $\mathrm{Im} f$ được gọi là hạng của f, kí hiệu là $\operatorname{rank} f$:

$$\operatorname{rank} f = \dim \mathrm{Im} f.$$

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + 2y, y + z)$$

Tìm số chiều và cơ sở của $\mathrm{Im} f$ và $\mathrm{Ker} f$.

1.5 Hạng của ánh xạ tuyến tính

Lời giải
Ta có

$$\text{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = y + z = 0\}$$

Vì hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} x + 2y & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases}$$

có nghiệm dạng $\{(-2t, t, -t), t \in \mathbb{R}\}$ nên

$$\text{Ker} f = \{(-2t, t, -t), t \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-2, 1 - 1)\}$$

Mặt khác, áp dụng định lý về số chiều ta được:

$$\dim \text{Im} f = 3 - \dim \text{Ker} f = 3 - 1 = 2.$$

Hơn nữa Im f là không gian con của không gian $\mathbb{R}^2$ nên Im $f \equiv \mathbb{R}^2$.
Do đó hạng của $\operatorname{rank} f = 2$.

1.6 Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

Định nghĩa

Ánh xạ tuyến tính được gọi là đơn cấu (tương ứng toàn cấu, đẳng cấu) nếu nó là đơn ánh (tương ứng toàn ánh, song ánh.)

Ví dụ

1. Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$
là đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu.
2. Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi
$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$
không là đơn cấu, cũng không là toàn cấu.
3. Ánh xạ tuyến tính $f : P_n[x] \to P_{n-1}[x]$ xác định bởi $f(p(x)) = p'(x)$, (đạo hàm của $p(x)$) là toàn cấu nhưng không là đơn cấu.

1.6 Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

SAMI 1956

Mệnh đề

Cho ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$.

1. f là đơn cấu khi và chỉ khi $\text{Ker} f = \{\theta_V\}$.
2. f là toàn cấu khi và chỉ khi $\dim \text{Im} f = \dim W$

Chứng minh

1. Nếu f là đơn cấu thì với mọi $v \in \text{Ker} f$ ta có $f(v) = f(\theta_V) = \theta_W$. Do tính đơn ánh nên $v = \theta_V$.
   Ngược lại, nếu $\text{Ker} f = \{\theta_V\}$, lấy v_1, v_2 bất kỳ thoả mãn $f(v_1) = f(v_2)$ ta có $f(v_1 - v_2) = \theta_W$. Điều này chứng tỏ $(v_1 - v_2) \in \text{Ker} f$, do đó $v_1 - v_2 = \theta_V$ hay $v_1 = v_2$.
2. f là toàn cấu khi và chỉ khi $f(V) = W$ khi và chỉ khi $\dim \text{Im} f = \dim W$.

1.6 Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

Hệ quả

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to V', \dim V = \dim V'$. Ta có các khẳng định sau là tương đương:

1. f là đơn cấu
2. f là toàn cấu
3. f là đẳng cấu.

Định nghĩa

Cho V, W là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$. Ta nói V, W là đồng cấu nếu tồn tại đẳng cấu $f : V \to W$. Khi đó ta kí hiệu: $V \cong W$.

Cho V là không gian véc tơ n chiều trên trường $\mathbb{K}$ và B là một cơ sở của V. Khi đó ánh xạ

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{K}^n \\ v &\to (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

với $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là toạ độ của v đối với cơ sở B, là một đẳng cấu giữa V và $\mathbb{K}^n$. Do đó: $V \cong \mathbb{K}^n$.