Chương 4
ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

Nội dung Chương 4

Nội dung Chương 4

1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính
2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính
3. Trị riêng và véc-tơ riêng

2. MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm ma trận của ánh xạ tuyến tính, ma trận đồng dạng và mối liên hệ giữa các phép toán trên ma trận và ánh xạ.
- Kỹ năng: Viết được ma trận của ánh xạ với cặp cơ sở bất kỳ cũng như xây dựng được công thức của ánh xạ nếu biết ma trận của nó, tương tự cho toán tử tuyến tính.

Nội dung

2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho V, W là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}, \dim V = n, \dim W = m$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả sử B là một cơ sở của V và B' là một cơ sở của W với

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$$

Khi đó mọi véc tơ $v \in V$ được xác định bởi toạ độ của v đối với cơ sở B và $f(v)$ được xác định bởi toạ độ của nó đối với cơ sở B'. Ta có thể xây dựng ma trận của ánh xạ f để biểu diễn mối quan hệ giữa hai tọa độ này.

Định nghĩa

Cho f là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ n chiều V tới không gian véc tơ m chiều W. Giả sử B là một cơ sở của V và B' là một cơ sở của W với

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$$

Ma trận A cỡ $m \times n$ được gọi là **ma trận của ánh xạ tuyến tính** f đối với cặp cơ sở B, B' nếu với mọi véc tơ $v \in V$

$$[f(v)]_{B'} = A[v]_B \tag{1}$$

ở đó $[f(v)]_{B'}$ là tọa độ cột của véc tơ $f(v)$ trong cơ sở B' và $[v]_B$ là tọa độ của véc tơ v trong cơ sở B.

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + x_3, x_1 + 2x_3)$$

Xét cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$ là:

$$E = \{e_1 = (1; 0; 0), e_2 = (0; 1; 0), e_3 = (0; 0; 1)\},\ E' = \{e_1' = (1; 0), e_2' = (0; 1)\}$$

Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1; 0; 0) = (1; 1) \\ f(e_2) &= f(0; 1; 0) = (-3; 0) \\ f(e_3) &= f(0; 0; 1) = (1; 2) \end{aligned}$$

Với mọi véc tơ $v(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(v) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3)$$

2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

Do $f(v) \in \mathbb{R}^2$, giả sử $f(v) = (y_1, y_2)$ biểu thức trên được viết lại dưới dạng:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Từ đó nếu đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ thì với mọi véc tơ $v \in \mathbb{R}^3$ ta có

$$[f(v)]_{E'} = A[v]_E$$

A chính là ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

Nhận xét

Nếu thay v_i vào (1) ta được
$$[f(v_i)]_{B'} = A[v_i]_B, \forall i = \overline{1, n}$$
Do đó cột thứ i của ma trận A là véc tơ toạ độ của $f(v_i)$ đối với cơ sở B'.
Cụ thể, nếu biểu diễn các ảnh $f(v_i)$ qua cơ sở B' là:

$$\begin{cases} f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m \\ \ldots \\ f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m \end{cases} \qquad (*)$$

thì ta có ma trận A thu được từ phép chuyển vị đối với ma trận của các hệ số trong biểu diễn $(*)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

Quy trình xác định ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với mỗi cặp cơ sở B của V và B' của W.

Bước 1. Tính $f(v_i)$ với mọi $v_i \in B$
Bước 2. Tìm tọa độ của $f(v_i)$ trong cơ sở B'.
Bước 3. Lập A là ma trận tọa độ cột của hệ véc tơ $\{f(v_i), i = \overline{1, n}\}$:

$$A = ([f(v_1)]_{B'} [f(v_2)]_{B'} \dots [f(v_n)]_{B'})$$

Ý nghĩa của ma trận của ánh xạ tuyến tính

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "\text{Tính trực tiếp}"] \arrow[d, "(1)"'] & f(v) \\
{[v]_B} \arrow[r, "\text{Nhân } A[v]_B", "\text{Tính gián tiếp (2)}"'] & {[f(v)]_{B'}} \arrow[u, "(3)"']
\end{tikzcd}$$

2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

Theo sơ đồ này, khi đã biết $v \in V$, muốn tính $f(v)$ có hai cách: cách thứ nhất là tính trực tiếp, cách thứ hai là tính gián tiếp qua 3 bước:

1. Tìm tọa độ $[v]_B$.
2. Tính $[f(v)]_{B'} = A[v]_B$.
3. Từ $[f(v)]_{B'}$ ta suy ra $f(v)$.

Nhận xét

1. Ta có thể chọn các cơ sở B và B' sao cho ma trận A càng đơn giản càng tốt. Khi đó ma trận có thể cung cấp những thông tin quan trọng về ánh xạ tuyến tính.
2. Mối quan hệ giữa tập hợp các ánh xạ tuyến tính f và ma trận tương ứng được thể hiện qua đẳng cấu $\mathcal{F}$: Hom$(V, W) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$ được xác bởi $\mathcal{F}(f) = A$. Như vây Hom$(V, W) \cong M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 1

Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$$

đối với các cơ sở $B_1 = \{e_1(1;0;0)e_2(0;1;0), e_3(0;0;1)\}$ và $B_2 = \{e'_1(1;1), e'_2(0;1)\}$. Ta có

$$\begin{cases} f(e_1) & = (1;0) = e'_1 - e'_2 \\ f(e_2) & = (1;1) = e'_1 \\ f(e_3) & = (0;1) = \qquad e'_2 \end{cases}$$

Do đó ma trận của f đối với cặp cơ sở B_1, B_2 là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 2

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Tính $f(1;2;3)$.
b) Tìm cơ sở và số chiều của $\text{Ker} f$.
c) Tìm cơ sở và số chiều của $\text{Im} f$.

Lời giải
a) Ta có

$$\begin{aligned} f(1;2;3) &= f(1;0;0) + 2f(0;1;0) + 3f(0;0;1) \\ &= (2;1) + (-4;3) + (1;-2) \\ &= (-1;1) \end{aligned}$$

2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

Nhận xét

Ta có thể tính $f(1;2;3)$ "gián tiếp" bằng cách nhân ma trận A với tọa độ cột của $(1;2;3)$ (đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$) để được toạ độ cột của $f(1;2;3)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Do đó $f(1;2;3) = (-1;1)$.

Lời giải

b) Ta có Ta có Ker$f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f(x,y,z) = (0,0)\}$. Do đó

$$(x,y,z) \in \text{Ker} f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y + z &= 0 \\ x + 3y - 2z &= 0. \end{cases}$$

Không gian nghiệm của hệ trên là $\{(x,y,z) = (t,t,2t), t \in \mathbb{R}\}$ nên $\dim \text{Ker} f = 1$ và một cơ sở của Ker$f$ là $\{(1,1,2)\}$.

c) Từ định lý về số chiều ta có: $\dim \text{Im} f = 3 - \dim \text{Ker} f = 2$. Mặt khác Im$f$ là không gian con của $\mathbb{R}^2$. Do đó Im$f \equiv \mathbb{R}^2$. Ta có thể chọn một cơ sở của Imf chính là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $\{(1;0),(0;1)\}$.

2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_3[x]$ có ma trận đối với cặp cơ sở chính tắc của $P_2[x], P_3[x]$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3 & -12 & 7 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Tính $f(1 + x + x^2)$
b) Tìm cơ sở và số chiều của Ker$f$.
c) Tìm cơ sở và số chiều của Imf.

Lời giải
a) Ta có

$$\begin{aligned} f(1 + x + x^2) &= f(1) + f(x) + f(x^2) \\ &= (1 + 3x + x^2 + 2x^3) + (-4 - 12x - 4x^2 - 8x^3) + (5 + 7x - x^2 - x^3) \\ &= 2 - 2x - 4x^2 + 7x^3. \end{aligned}$$

2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

Nhận xét. Ta có thể tính $f(1+x+x^2)$ theo cách "gián tiếp" như sau: toạ độ của $1+x+x^2$ đối với cơ sở chính tắc là $(1;1;1)$ và

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3 & -12 & 7 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Do đó $f(1+x+x^2) = 2 - 2x - 4x^2 + 7x^3$.

2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

Lời giải

b) Ta có $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \text{Ker}f$ khi và chỉ khi $A.X = 0$ với $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ là toạ độ cột của $p(x)$ đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Phương trình $A.X = 0$ tương đương với hệ phương trình sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3 & -12 & 7 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Xét ma trận bổ sung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 0 \\ 3 & -12 & 7 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & -8 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[h_4-2h_1\to h_4]{h_2-3h_1\to h_2, h_3-h_1\to h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[h_4+9h_2\to h_4]{h_2/(-8)\to h_2, h_3+6h_2\to h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Từ đó ta có tập hợp nghiệm là $\{(a_0, a_1, a_2) = (4t, t, 0) = t(4, 1, 0), t \in \mathbb{R}\}$. Do đó $\text{Ker}f = \text{span}\{4 + x\}$ và $\dim \text{Ker}f = 1$.

Lời giải

c) Từ định lý về số chiều ta có: $\dim \mathrm{Im} f = 3 - \dim \mathrm{Ker} f = 2.$

Mặt khác Imf = span$\{(f(1), f(x), f(x^2))\}$. Ta viết ma trận tọa độ của hệ này theo hàng:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & -12 & -4 & -8 \\ 5 & 7 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 - 5h_1 \to h_3]{h_2 + 4h_1 \to h_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & -11 \end{pmatrix}$$

Do đó cơ sở của Imf là $\{(1 + 3x + x^2 + 2x^3), (8x + 6x^2 + 11x^3)\}$.

2.2 Ma trận đồng dạng

Ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với các cặp cơ sở khác nhau

Xét ánh xạ tuyến tính f từ không gian véc tơ n chiều V tới không gian véc tơ m chiều W. Giả sử B_1, B_2 là hai cơ sở của V và B_1', B_2' là hai cơ sở của W với

$$B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, B_1' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$$

$$B_2 = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}, B_2' = \{w_1', w_2', \ldots, w_m'\}$$

Giả sử A_1, A_2 lần lượt là ma trận của f tương ứng với cặp cơ sở B_1, B_1' và B_2, B_2'. Khi đó:

$$[f(v)]_{B_1'} = A_1[v]_{B_1}, [f(v)]_{B_2'} = A_2[v]_{B_2}$$

Gọi P_1 là các ma trận chuyển từ cơ sở B_1 sang B_2, P_2 là các ma trận chuyển từ cơ sở B_1' sang B_2'. Theo tính chất của ma trận chuyển cơ sở:

$$[f(v)]_{B_1'} = P_2[f(v)]_{B_2'}, [v]_{B_1} = P_1[v]_{B_2}$$

2.2 Ma trận đồng dạng

Từ đó ta có:

$$A_1[v]_{B_1} = [f(v)]_{B'_1} = P_2[f(v)]_{B'_2} = P_2A_2[v]_{B_2} = P_2A_2P_1^{-1}[v]_{B_1}, \forall v \in V$$

Suy ra:

$$A_1 = P_2A_2P_1^{-1}$$

Khi $m = n$ và $V \equiv W$, tức là $B'_1 \equiv B_1, B'_2 \equiv B_2$ thì $P_2 \equiv P_1 := P$, ta có

$$A_1 = PA_2P^{-1}$$

với P là ma trận chuyển từ cơ sở B_1 sang cơ sở B_2. Ta cũng có thể viết

$$A_2 = P^{-1}A_1P.$$

Định nghĩa

Giả sử A và B là hai ma trận vuông cùng cấp n. Ta nói A và B đồng dạng với nhau, kí hiệu $A \sim B$ nếu tồn tại một ma trận không suy biến P sao cho

$$B = P^{-1}AP.$$

2.3 Ma trận của toán tử tuyến tính

Từ khái niệm ma trận của ánh xạ tuyến tính cho phép chúng ta xây dựng khái niệm ma trận của toán tử tuyến tính, khi mà không gian nguồn và không gian đích trùng nhau.

Định nghĩa

Cho T là một toán tử tuyến tính của không gian véc tơ n chiều V. Giả sử B là một cơ sở của V với

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Ma trận A tương ứng với "cặp" cơ sở $\{B, B\}$ được gọi là ma trận của T đối cơ sở B.

Nhận xét

1. Ma trận của toán tử tuyến tính là ma trận vuông cỡ $n \times n$ thoã mãn tính chất

$$[T(v_i)]_B = A.[v_i]_B, \forall i = \overline{1, n}$$

2. Hai ma trận của một ánh xạ tuyến tính tương ứng với hai cơ sở khác nhau là hai ma trận đồng dạng.

2.4 Các phép toán

Tổng của hai ánh xạ tuyến tính

Xét V là không gian véc tơ n chiều và W là không gian véc tơ m chiều trên trường $\mathbb{K}$. Cho hai ánh xạ tuyến tính $f, g : V \to W$. Nhắc lại *tổng* của hai ánh xạ này, ký hiệu $f + g$, là ánh xạ tuyến tính cho bởi

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u), \forall u \in V.$$

Mệnh đề

Nếu các ánh xạ tuyến tính f, g có ma trận tương ứng là A, B đối với cặp cơ sở nào đó của V, W thì tổng $f + g$ có ma trận là $A + B$ đối với các cơ sở này.

Đối với tích kf của số $k \in \mathbb{K}$ với ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có

Mệnh đề

Nếu ánh xạ tuyến tính f có ma trận là A đối với một cặp cơ sở của V, W thì tích kf, với $k \in \mathbb{K}$, có ma trận là kA đối với cặp cơ sở này.

2.4 Các phép toán

Hợp thành của hai ánh xạ tuyến tính

Cho các ánh xạ tuyến tính xác định trên các không gian véc tơ hữu hạn chiều V, W, Z

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$

Khi đó dễ thấy hợp thành $g \circ f : V \to Z$ cũng là một ánh xạ tuyến tính.

Mệnh đề

Nếu các ánh xạ tuyến tính f, g có ma trận tương ứng là A, C đối với các cơ sở nào đó thì hợp thành $g \circ f$ có ma trận là CA đối với các cơ sở này.

2.4 Các phép toán

Ánh xạ ngược

Cho V, W là hai không gian véc tơ có cùng số chiều. Ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ được gọi là *không suy biến* nếu ma trận của nó không suy biến.

Mệnh đề

Ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ không suy biến khi và chỉ khi nó là một đẳng cấu. Hơn nữa, nếu đẳng cấu f có ma trận A đối với cặp cơ sở nào đó thì ánh xạ ngược f^{-1} có ma trận là A^{-1} đối với cặp cơ sở này.