Chương 2
MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

Chương 2

Chương 2 giới thiệu cho các bạn sinh viên các kiến thức về ma trận, định thức và hệ phương trình tuyến tính. Chúng cung cấp các công cụ hữu hiệu giúp chúng ta tìm hiểu nội dung của các chương tiếp theo.

Nội dung Chương 2 bao gồm:

1. Ma trận và các phép toán
2. Định Thức
3. Ma trận nghịch đảo
4. Hạng của ma trận
5. Hệ phương trình tuyến tính

Trong chương này, $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$.

2. ĐỊNH THỨC

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm phép thế, định thức của một ma trận vuông và các tính chất của định thức.
- Kĩ năng: Sinh viên thành thạo sử dụng định nghĩa và các tính chất để tính định thức (tính định thức bằng khai triển và biến đổi sơ cấp...).

Nội dung

2.1 Phép thế

2.2 Định thức của ma trận vuông

2.3 Công thức khai triển

2.4 Tính chất của định thức

2.1 Phép thế

Định nghĩa

Một phép thế bậc n là một song ánh $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$.

Gọi S_n là tập hợp các phép thế bậc n.

Phép thế bậc n thường được viết dưới dạng $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$, với $(f(1), f(2), \dots, f(n))$ là một hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$. Mỗi phép thế bậc n sẽ tương ứng với một hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$ và ngược lại. Bởi vậy, số các phép thế bậc n là $|S_n| = n!$.

2.1 Phép thế

Định nghĩa

Cho f là một phép thế bậc n.

1. Cặp $(f(i), f(j))$ với $1 \leq i < j \leq n$ gọi là nghịch thế nếu $f(i) > f(j)$.
2. Nếu số nghịch thế của f là chẵn (t.ư. lẻ) thì f gọi là phép thế chẵn (t.ư. phép thế lẻ).
3. Dấu của phép thế f, ký hiệu là $sign(f)$, được xác định bởi

$$sign(f) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } f \text{ là phép thế chẵn} \\ -1 & \text{nếu } f \text{ là phép thế lẻ.} \end{cases}$$

Ví dụ 1

Cho phép thế bậc 3: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, tức là $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2$.

- Ta có $(\sigma(1), \sigma(2))$ là nghịch thế vì $\sigma(1) = 3 > 1 = \sigma(2)$; còn $(\sigma(2), \sigma(3))$ không là nghịch thế vì $\sigma(2) = 1 < 2 = \sigma(3)$.
- Phép thế σ có 2 nghịch thế là $(\sigma(1), \sigma(2))$ và $(\sigma(1), \sigma(3))$. Bởi vậy, σ là phép thế chẵn và $sign(\sigma) = 1$.

2.1 Phép thế

Vì $f^{-1}(f(i)) = i$ với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nên nếu $(f(i), f(j))$ là nghịch thế của f thì (j, i) là nghịch thế của f^{-1}. Bởi vậy, ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề

Số nghịch thế của f bằng số nghịch thế của f^{-1} và

$$sign(f^{-1}) = sign(f).$$

Hơn nữa, dấu của phép thế có tính chất sau:

Mệnh đề

Cho f và g là các phép thế bậc n. Khi đó

$$sign(f \circ g) = sign(f) \cdot sign(g).$$

2.2 Định thức của ma trận vuông

Định nghĩa

Cho ma trận vuông cấp n: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Định thức của A là một số, ký hiệu là $\det(A)$ hoặc $|A|$ được xác định bởi công thức

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \tag{1}$$

Định thức của ma trận vuông cấp n gọi là định thức cấp n.

Chú ý

Tổng (1) có $n!$ số hạng; trong mỗi số hạng mỗi hàng đóng góp một phần tử, mỗi cột đóng góp một phần tử.

Ví dụ 2

Định thức cấp 2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. chẳng hạn $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - (-2)\cdot 3 = 11.$.

2.2 Định thức của ma trận vuông

Ví dụ 3

Định thức cấp 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

*** Quy tắc Saruss:**

$$\begin{array}{ccccc} {}^{+}a_{11} & {}^{+}a_{12} & {}^{+}a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ {}_{-}a_{31} & {}_{-}a_{32} & {}_{-}a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Ví dụ 4

Tính $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

2.3 Công thức khai triển

Định nghĩa

Cho ma trận vuông cấp n: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Với mỗi cặp (i,j), $1 \le i,j \le n$, ký hiệu M_{ij} là ma trận vuông cấp $(n-1)$ có được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j.
Khi đó, ký hiệu $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ và gọi là phần phụ đại số của a_{ij}.

Ví dụ 5

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.
Các phần phụ đại số của A *là:*

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 21,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -15,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 14, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3, \ldots$$

2.3 Công thức khai triển

Định lý

Cho ma trận vuông $A = [a_{ij}]$ cấp n và A_{ij} là phần phụ đại số của a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$. Khi đó

1. Với mỗi i cố định, $1 \leq i \leq n$, ta có (công thức khai triển theo hàng i):
$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}; \tag{2}$$
2. Với mỗi j cố định, $1 \leq j \leq n$, ta có (công thức khai triển theo cột j):
$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}. \tag{3}$$

Các công thức (2) và (3) cho phép tính định thức cấp n qua các định thức cấp $(n-1)$. Hơn nữa, trong thực hành, ta nên chọn hàng hay cột có nhiều số 0 để khai triển.

Ví dụ 6

Tính $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

2.4 Tính chất của định thức

Tính chất 1. Với ma trận vuông A, ta có $\det(A) = \det(A^t)$.

Ví dụ 7

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

Hệ quả

Một tính chất của định thức đúng khi phát biểu cho hàng thì cũng đúng khi phát biểu cho cột.

2.4 Tính chất của định thức

Tính chất 2. Nếu đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) của ma trận thì định thức của nó đổi dấu.

Ví dụ 8

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Hệ quả

Nếu ma trận A có hai hàng (hay hai cột) giống nhau thì $\det(A) = 0$.

Ví dụ 9

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \text{ (vì hàng 1 và hàng 2 giống nhau).}$$

2.4 Tính chất của định thức

Tính chất 3. Nếu nhân tất cả các phần tử trên một hàng (hay một cột) của ma trận A với một số k thì được ma trận B với $\det(B) = k\det(A)$.

Hệ quả

Nếu các phần tử của một hàng (hay một cột) có thừa số chung thì ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.

Ví dụ 10

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$ *(rút nhân tử chung ở hàng 3 ra ngoài dấu định thức).*

Hệ quả

Cho ma trận A vuông cấp n và số k. Khi đó $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Hệ quả

Nếu ma trận A có một hàng (hay một cột) mà các phần tử đều bằng 0 thì $\det(A) = 0$.

2.4 Tính chất của định thức

Tính chất 4. Nếu ma trận A có hai hàng (hay hai cột) tỉ lệ thì $\det(A) = 0$.

Ví dụ 11

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ (vì hàng 1 và hàng 2 tỉ lệ với nhau).

Tính chất 5. Nếu ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ có một hàng k (t.ư. một cột l) nào đó mà $a_{kj} = b_j + c_j$, $1 \le j \le n$ (t.ư. $a_{il} = e_i + f_i$, $1 \le i \le n$) thì định thức của A bằng tổng của hai định thức như sau:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.4 Tính chất của định thức

Tính chất 6. Nếu cộng vào một hàng (t.ư. cột) nào đó của ma trận A một bội của hàng (t.ư. cột) khác của A thì được ma trận B với $\det(B) = \det(A)$.

Ví dụ 12

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{h_2+(-3)h_1 \to h_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Tính chất 7. Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}, \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}. \tag{4}$$

Tính chất 8. Với mọi ma trận vuông cùng cấp A và B, ta có $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Ví dụ 13

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. *Ta có* $\det(A) = -2$, $\det(B) = -3$. *Bởi vậy,* $\det(AB) = (-2) \cdot (-3) = 6$.

Sử dụng biến đổi sơ cấp để tính định thức

Ví dụ 14

Tính định thức $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -97 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix}$.

Giải.

$$D \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -97 & -1 \\ 4 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix} \underset{h_3 - 4h_1 \to h_3}{\overset{h_2 - 2h_1 \to h_2}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -97 & -3 \\ 0 & 9 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix} \overset{h_2 - 2h_4 \to h_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 9 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{h_4 - 2h_2 \to h_4}{\overset{h_3 - 9h_1 \to h_3}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -66 & 41 \\ 0 & 0 & -66 & 11 \end{vmatrix} \overset{h_4 - h_3 \to h_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -66 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-66) \cdot (-30) = -1980.$$

Kết hợp khai triển và biến đổi sơ cấp để tính định thức

Chú ý

Khi tính định thức, việc kết hợp biến đổi sơ cấp với công thức khai triển sẽ giảm sự cồng kềnh trong trình bày. Chẳng hạn trong ví dụ trên, ta có thể viết như sau:

$$D \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -97 & -1 \\ 4 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix} \underset{h_3 - 4h_1 \to h_3}{\overset{h_2 - 2h_1 \to h_2}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -97 & -3 \\ 0 & 9 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{theo cột 1}}{\overset{\text{khai triển theo}}{=}} -1. \begin{vmatrix} 5 & -97 & -3 \\ 9 & -3 & -4 \\ 2 & -52 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot [(-15) + 776 + 1404 - 18 - (-873) - 1040] = -1980.$$