Chương 5
DẠNG SONG TUYẾN TÍNH, DẠNG TOÀN PHƯƠNG VÀ KHÔNG GIAN EUCLID

[1]

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2023

[1] Email: sami@hust.edu.vn

2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Dạng toàn phương là một đa thức nhiều biến với các số hạng đều là các đa thức bậc 2. Trong bài này, chúng ta sẽ đến với dạng toàn phương dưới một góc nhìn từ phía không gian véc tơ và dạng song tuyến tính đối xứng. Qua đó ta xem xét một số các đặc tính của dạng toàn phương trong mối liên hệ với các ma trận đối xứng.

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm dạng toàn phương, các đặc tính của dạng toàn phương
- Kĩ năng: Xác định mối quan hệ giữa dạng toàn phương và dạng song tuyến tính đối xúng, các phương pháp đưa dạng toàn phương về biểu thức chính tắc, xem xét dạng toàn phương xác định dương, xác định âm.

Nội dung

2.1 Khái niệm dạng toàn phương và mối liên hệ với dạng song tuyến tính đối xứng

2.2 Ma trận và biểu thức của dạng toàn phương

2.3 Bài toán đưa biểu thức của dạng toàn phương về chính tắc

2.4 Dạng toàn phương xác định dương, xác định âm

2.1. Khái niệm dạng toàn phương và mối liên hệ với dạng song tuyến tính đối xứng

Cho f sẽ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên V, $f(u,v) = f(v,u)$, $\forall u, v \in V$ điều này tương đương với f có ma trận A đối xứng đối với cơ sở B do

$$f(u,v) = x^T Ay; f(v,u) = y^T Ax = (y^T Ax)^T = x^T A^T y.$$

Ta định nghĩa dạng toàn phương ϕ là một ánh xạ

$$\begin{aligned} \phi : V &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \phi(u) = f(u,u) \end{aligned}$$

được gọi là dạng toàn phương trên V ứng (liên kết) với dạng song tuyến tính đối xứng f.
Ngược lại, khi cho trước dạng toàn phương ϕ ta có dạng song tuyến tính

$$f(u,v) = \frac{1}{2}[\phi(u+v) - \phi(u) - \phi(v)]$$

gọi là dạng song tuyến tính đối cực của ϕ.

Ví dụ

1. Cho $V = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. Ta xét dạng sau:
$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$
là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^2$. Khi đó ta có dạng toàn phương $\phi(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 3x_2^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$.
2. Tổng quát, cho $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ và A là một ma trận đối xứng cấp n. Ta xét dạng sau: $f(x,y) = x^TAy$ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^n$ và $\phi(x) = x^TAx$ là dạng toàn phương liên kết với f và ngược lại.
3. Cho $V = P_n[x]$, $p(x), q(x)$ là hai đa thức của V. Khi đó dạng sau: $f(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1)$ là một dạng song tuyến tính đối xứng và dạng toàn phương liên kết với f là $\phi(p(x)) = p(0)^2 + p(1)^2$.
4. Cho $V = C_{[a;b]}$ các hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$, $f(x), g(x) \in V$. Khi đó dạng sau: $T(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ là một dạng song tuyến tính đối xứng và dạng toàn phương liên kết với T là $\phi(f(x)) = \int_a^b [f(x)]^2dx$.

2.2. Ma trận và biểu thức của dạng toàn phương

- **Định nghĩa:** Cho V là một không gian véc tơ hữu hạn chiều có $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của V,ϕ là dạng toàn phương liên kết với f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên V. khi đó ma trận đối xứng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

với $a_{ij} = f(u_i, u_j)$ của f đối với cơ sở B cũng được gọi là ma trận của dạng toàn phương ϕ đối với cơ sở B.

- **Ví dụ:** Cho $V = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$. Ta xét dạng toàn phương sau:

$$\phi(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2.$$

Ma trận của ϕ đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.2. Ma trận và biểu thức của dạng toàn phương

Cho V là một không gian véc tơ hữu hạn chiều có $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của V,ϕ là một dạng toàn phương trên V liên kết với dạng song tuyến tính đối xứng f và A là ma trận của ϕ đối với cơ sở B. Với véc tơ bất kỳ $u \in V$ ta có tọa độ đối với cơ sở B là

$$[u]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Khi đó

$$\phi(u) = f(u,u) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j f(u_i, u_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

hay

$$\phi(u) = [u]_B^T.A.[u]_B = x^T Ax.$$

gọi là biểu thức của dạng toàn phương ϕ đối với cơ sở B. Trong trường hợp $A = diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là ma trận chéo ta có $\phi(u) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2$ gọi là biểu thức chính tắc của dạng toàn phương. Đặc biệt $a_i \in \{-1; 0; 1\}, \forall i = 1, \dots, n$ thì ta gọi là biểu thức chuẩn tắc của dạng toàn phương.

2.3. Các phương pháp đưa biểu thức dạng toàn phương về biểu thức chính tắc

Phương pháp Lagrange: Sử dụng các đổi biến $x = Cy$ thích hợp để đưa dạng toàn phương $\phi = x^T Ax$ thành $\phi = y^T (C^T AC)y$ có dạng chính tắc. Phương pháp Lagrange dựa trên 2 phép xử lý cơ bản là:

1. $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$
2. $xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2]$

Ví dụ 1. Cho $\phi = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$. Đưa biểu thức về dạng chính tắc.
Lời giải. Ta có

$$\phi = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 = x_1^2 - 2x_1(x_2 - 2x_3) + 2x_2^2 + 5x_3^2$$

$$= x_1^2 - 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 - 3x_3^2.$$

Ta đặt $y_1 = x_1 - x_2 + x_3$,$y_2 = x_2 + 2x_3$,$y_3 = x_3$ thì ta có $\phi = y_1^2 + y_2^2 - 3y_3^2$ có dạng chính tắc.

2.3. Các phương pháp đưa biểu thức dạng toàn phương về biểu thức chính tắc

Ví dụ 2. Cho $\phi = x_1x_2 - 2x_2x_3$. Đưa biểu thức về dạng chính tắc.
Lời giải. Ta đặt $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3$ ta có

$$\phi = y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_3 + 2y_2y_3 = (y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - y_2^2 + 2y_2y_3 - y_3^2$$
$$= (y_1 - y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2$$

Ta đặt $z_1 = y_1 - y_3$,$z_2 = y_2 - y_3$,$z_3 = y_3$ thì ta có $\phi = z_1^2 - z_2^2$ có dạng chính tắc.
Nhận xét:

1. Các phép đổi biến dạng $y = C^{-1}x$ hoặc $x = Cy$ trong đó C là các ma trận khả nghịch tương ứng với việc chuyển cơ sở từ cơ sở ban đầu sang cơ sở mới.
2. Mọi biểu thức của dạng toàn phương đều đưa được về dạng chính tắc, chuẩn tắc.
3. Cho ma trận A đối xứng, luôn tồn tại ma trận khả nghịch C để C^TAC có dạng chéo.
4. Cho dạng toàn phương ϕ liên kết với dạng song tuyến tính đối xứng f, khi đó luôn tồn tại cơ sở $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ của V thỏa mãn $f(u_i, u_j)$=0,$\forall i \neq j$.

2.3. Các phương pháp đưa biểu thức dạng toàn phương về biểu thức chính tắc

Phương pháp Jacobi: Phương pháp Jacobi dựa trên việc xây dựng lần lượt các véc tơ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ trong cơ sở B của V thỏa mãn $f(u_i, u_j) = 0, \forall i \neq j$. Phương pháp Jacobi được áp dụng cho trường hợp các định thức con chính của ma trận A đều khác 0. *Định thức con chính* cấp r của ma trận vuông A là định thức

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Định lý Jacobi: *Giả sử đối với cơ sở $u_1, u_2, \cdots, u_n$ của không gian V đã cho dạng toàn phương*

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = \phi(u_i, u_j).$$

Hơn nữa, giả sử các định thức con chính $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ của ma trận $A = (a_{ij})$ đều khác không. Khi đó tồn tại cơ sở $v_1, v_2, \cdots, v_n$ của V sao cho dạng toàn phương $\phi(u, u)$ viết được dưới dạng

$$\phi(u) = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + ... + k_n y_n^2,$$

và các hệ số k_i xác định bởi $k_i = \dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}, \quad i = 1, 2, ..., n,$ *trong đó ta quy ước* $\Delta_0 = 1.$

2.4. Dạng toàn phương xác định dương, xác định âm

- **Định nghĩa:** Dạng toàn phương $\phi(u)$ gọi là xác định *dương* (*âm*) nếu với mọi vectơ $u \neq 0$ thì $\phi(u) > 0$ (tương ứng, $\phi(u) < 0$).
- **Nhận xét:** *Một dạng toàn phương là xác định dương (âm) khi và chỉ khi các hệ số của dạng chính tắc của nó đều dương (tương ứng, đều âm).*
- **Tiêu chuẩn Sylvester:** *Để một dạng toàn phương là xác định dương điều kiện cần và đủ là tất cả các định thức con chính của nó đều dương. Để một dạng toàn phương là xác định âm điều kiện cần và đủ là tất cả mọi định thức con chính cấp chẵn đều dương và tất cả mọi định thức con chính cấp lẻ đều âm.*
- **Ví dụ.** Cho dạng toàn phương

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$$

Ma trận của ϕ là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

có các định thức con chính $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 3, \Delta_3 = 20$, bởi vậy dạng toàn phương đã cho xác định dương.