

BÀI TẬP THAM KHẢO GIẢI TÍCH I**Nhóm ngành 1****Mã số: MI 1111****Chương 1****Phép tính vi phân hàm một biến số****1.1-1.4. Dãy số, hàm số****Bài 1.** Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sqrt{2 \operatorname{arccot} x - \pi}$

c) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

b) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

d) $y = \arccos(\sin x)$

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sinh(-x) = -\sinh x$

d) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

b) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

e) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

c) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

f) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

Bài 3. Tìm miền giá trị của các hàm số

a) $y = \log(1 - 2 \cos x)$

c) $y = \operatorname{arccot}(\sin x)$

b) $y = \arcsin\left(\log \frac{x}{10}\right)$

d) $y = \arctan(e^x)$

Bài 4. Tìm $f(x)$ biết

a) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$

Bài 5. Tìm hàm ngược của các hàm số

a) $y = 2 \arcsin x$

b) $y = \frac{1-x}{1+x}$

c) $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Bài 6. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số

a) $f(x) = a^x + a^{-x}, (a > 0)$

c) $f(x) = \sin x + \cos x$

b) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

d) $f(x) = \arcsin(\tan x)$

Bài 7. CMR bất kỳ hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-a, a), (a > 0)$ cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn với một hàm số lẻ.

Bài 8. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số xác định trên khoảng đối xứng $(-a, a), (a > 0)$. CMR:

a) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm chẵn thì tổng và tích của chúng là hàm chẵn.

b) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm lẻ thì tổng của chúng là hàm lẻ và tích của chúng là hàm chẵn.

c) Nếu $f(x)$ là hàm lẻ và $g(x)$ là hàm chẵn thì tích của chúng là hàm lẻ.

Bài 9. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của các hàm số sau (nếu có)

a) $f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$

c) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$

b) $f(x) = \sin(x^2)$

d) $f(x) = \cos^2 x$

Bài 10. Tìm giới hạn của các dãy số (nếu hội tụ) với số hạng tổng quát x_n như sau

a) $x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

c) $x_n = \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$

b) $x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$

d) $x_n = \frac{\sqrt{n} \cos n}{n+1}$

Bài 11. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của các dãy với số hạng tổng quát x_n như sau

a) $x_n = \sqrt[n]{n^2 + 2}$

b) $x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right), x_0 > 0$

1.5-1.6. Giới hạn hàm số

Bài 12. Tìm các giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sqrt{1+x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}, \quad (m, n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{\ln(1+3\sin x)}$$

Bài 13. Tìm các giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \arccos^3 x) - \ln x}{x^2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$$

Bài 14. Tìm các giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), x > 0.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(e + 2x)]^{\frac{1}{\sin x}}$$

Bài 15. So sánh các cặp VCB sau

$$\text{a) } \alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} \text{ và } \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x, \text{ khi } x \rightarrow 0^+$$

$$\text{b) } \alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} \text{ và } \beta(x) = \cos x - 1, \text{ khi } x \rightarrow 0^+$$

$$\text{c) } \alpha(x) = x^3 + \sin^2 x \text{ và } \beta(x) = \ln(1 + 2 \arctan(x^2)), \text{ khi } x \rightarrow 0$$

1.7. Hàm số liên tục

Bài 16. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ a, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ a \cos x + b \sin x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \text{ hũu tí,} \\ 1, & \text{nếu } x \text{ vô tí.} \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \text{ hũu tí,} \\ x, & \text{nếu } x \text{ vô tí.} \end{cases} \end{array}$$
$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \frac{8}{1 - 2^{\cot x}} & \text{c) } y = \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \\ \text{b) } y = \frac{1}{x} \arcsin x & \text{d) } y = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \quad (a \neq b) \end{array}$$

a) $y = \frac{x}{4 - x^2}; -1 \leq x \leq 1$ b) $y = \ln x; 0 < x < 1$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{nếu } x < 1, \\ (1 - x)(2 - x), & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

- 4

Bài 24. Tìm vi phân của các hàm số

a) $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

c) $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|, (a \neq 0)$

b) $y = \arcsin \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

d) $y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$

Bài 25. Tìm

a) $\frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$

b) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

c) $\frac{d}{d(x^3)} (x^3 - 2x^6 - x^9).$

Bài 26. Tính gần đúng giá trị của các biểu thức

a) $\sqrt[3]{7,97}$

b) $\sqrt[7]{\frac{2-0,02}{2+0,02}}$

c) $\sqrt{3e^{0,04} + 1,02^2}$

Bài 27. Nếu $C(x)$ là chi phí sản xuất của x đơn vị một mặt hàng nào đó. Khi đó chi phí biên là $C'(x)$ cho biết chi phí phải bỏ ra khi muốn tăng sản lượng thêm một đơn vị. Cho hàm

$$C(x) = 2000 + 3x + 0,01x^2 + 0,0002x^3.$$

Tìm hàm chi phí biên, xác định chi phí biên tại $x = 100$, giá trị đó nói lên điều gì?

Bài 28. Tìm đạo hàm cấp cao của các hàm số

a) $y = \frac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$

d) $y = x^2 \sin x$, tính $y^{(50)}$

b) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$

e) $y = e^{x^2}$, tính $y^{(10)}(0)$

c) $y = \ln(2x - x^2)$, tính $y^{(5)}$

f) $y = x \ln(1+2x)$, tính $y^{(10)}(0)$

Bài 29. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số

a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

e) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

b) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

d) $y = e^{ax} \sin(bx + c)$

f) $y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$

Bài 30. Tìm vi phân cấp cao của hàm số

a) $y = (2x + 1) \sin x$. Tính $d^{10}y(0)$

c) $y = x^9 \ln x$. Tính $d^{10}y(1)$

b) $y = e^x \cos x$. Tính $d^{20}y(0)$

d) $y = x^2 e^{ax}$. Tính $d^{20}y(0)$

Bài 31. Trong một hồ nuôi cá, cá trong hồ liên tục được sinh ra và khai thác. Số lượng cá trong hồ P được mô tả bởi phương trình:

$$P'(t) = r_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_c} \right) P(t) - \beta P(t)$$

với r_0 là tỉ lệ sinh sản, P_c là số lượng cá lớn nhất hồ có thể duy trì, β là tỉ lệ khai thác. Cho $P_c = 10000$, tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ khai thác tương ứng là 5% và 4%. Tìm số lượng cá ổn định.

1.9. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Bài 32. Chứng minh rằng $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, phương trình

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(0, \pi)$.

Bài 33. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ với n nguyên dương, $n \geq 2$, không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

Bài 34. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $8ax^7 + 3bx^2 + c = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Bài 35. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm số $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $-1 \leq x \leq 1$.

Bài 36. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

c) $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2},$
 $0 < a < b$

b) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a.$

Bài 37. Tồn tại hay không hàm số $f(x)$ sao cho $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ và $f'(x) \leq 2$ với mọi x ?

Bài 38. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2-x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\ln(1-x)}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3^x)^{\tan \frac{1}{x}}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2^x)^{\frac{1}{x}}$

Bài 39. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}.$$

Bài 40. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $[a, b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên (a, b) . Chứng minh rằng với mọi $x \in (a, b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2} f''(c).$$

Bài 41. Dùng phương pháp Newton, tính $\sqrt[6]{2}$ đúng đến 8 chữ số thập phân sau dấu phẩy.

Bài 42. Giải thích tại sao phương pháp Newton không áp dụng trực tiếp được để giải phương trình $x^3 - 2x + 2 = 0$ với xấp xỉ đầu $x_0 = 1$.

Bài 43. Khảo sát tính đơn điệu của các hàm số

a) $y = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

c) $y = x + |\sin 2x|, x \in [0, \pi]$

b) $y = 3 \arctan x - \ln(1 + x^2)$

Bài 44. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $2x \arctan x \geq \ln(1 + x^2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

c) $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$

Bài 45. Tìm cực trị của các hàm số

a) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

c) $y = \sqrt[3]{(1 - x)(x - 2)^2}$

b) $y = x - \ln(1 + x)$

d) $y = x^{\frac{2}{3}} + (x - 2)^{\frac{2}{3}}$

Bài 46. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $[a, b]$, chứng minh rằng $\forall c \in (a, b)$ ta có

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Bài 47. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $\tan \frac{x + y}{2} \leq \frac{\tan x + \tan y}{2}, \forall x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $x \ln x + y \ln y \geq (x + y) \ln \frac{x + y}{2}, \forall x, y > 0$

1.10. Khảo sát hàm số, đường cong

Bài 48. Tìm tiệm cận của các đường cong sau

a) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$

b) $y = \ln(1 + e^{-x})$

c) $y = \frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2}$

d) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = \frac{2016t^2}{1-t^3} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \arctan t \end{cases}$

Bài 49. Khảo sát các hàm số, đường cong sau

a) $y = e^{\frac{1}{x}-x}$

b) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

d) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

e) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1-t^2} \\ y = \frac{t^2}{1+t} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

g) $r = a + b \cos \varphi, (0 < a \leq b)$

h) $r = a \sin 3\varphi, (a > 0).$

Chương 2

Phép tính tích phân hàm một biến số

2.1 Tích phân bất định

Bài 50. Tính các tích phân

a) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$

e) $\int \frac{(x^2 + 2)dx}{x^3 + 1}$

i) $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$

b) $\int (x + 2) \ln x dx$

f) $\int \frac{dx}{(x + a)^2 (x + b)^2}$

j) $\int \frac{(3 - 2x)dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $\int |x^2 - 3x + 2| dx$

g) $\int \sin 5x \cos 3x dx$

k) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}}$

d) $\int \frac{x dx}{(x + 2)(x + 5)}$

h) $\int \tan^3 x dx$

l) $\int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$

Bài 51. Tính các tích phân

a) $\int \frac{x^4 dx}{x^{10} - 1}$

d) $\int \sin^{n-1} x \sin(n + 1)x dx, n \in \mathbb{N}^*$

b) $\int x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx$

e) $\int e^{-2x} \cos 3x dx$

c) $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

f) $\int \arcsin^2 x dx$

Bài 52. Lập công thức truy hồi tính $I_n, n \in \mathbb{N}$

a) $I_n = \int x^n e^x dx$

b) $I_n = \int \sin^n x dx$

c) $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$

2.2 Tích phân xác định

Bài 53. Tính các đạo hàm

a) $\frac{d}{dx} \int_x^y e^{t^2} dt$

b) $\frac{d}{dy} \int_x^y e^{t^2} dt$

c) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

Bài 54. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n\alpha + 2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta} \right], (\alpha, \beta > 0)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$

Bài 55. Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

Bài 56. Tính các tích phân sau

a) $\int_{1/e}^e |\ln x| (x+1) dx$

d) $\int_0^1 \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 + \tan^2 x)^2} dx$

b) $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$

e) $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$

c) $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$

f) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx, n \in \mathbb{N}^*$

Bài 57. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

a) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$

b) $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin x) dx$

Áp dụng tính các tích phân sau

1. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$

2. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

Bài 58. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a, b]$. Chứng minh bất đẳng thức (với $a < b$)

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

2.3 Tích phân suy rộng

Bài 59. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

a) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

Bài 60. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x) dx}{x^2}$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$

e) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$

i) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{\sqrt{x^3}}$

c) $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\ln^3 x}$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} dx$

j) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$

Bài 61. Nếu $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ thì có suy ra được $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ không? Xét ví dụ $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

Bài 62. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 0$. Tích phân $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ có hội tụ không?

2.4 Ứng dụng của tích phân xác định

Bài 63. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Parabol $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$

b) Đường cong $y = x^3$ và các đường $y = x, y = 4x, (x \geq 0)$

c) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ và parabol $y^2 = x, (y^2 \leq x)$

d) Đường $y^2 = x^2 - x^4$

Bài 64. Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ $x^2 + y^2 \leq a^2$ và $y^2 + z^2 \leq a^2$, ($a > 0$).

Bài 65. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt cong $z = 4 - y^2$, các mặt phẳng tọa độ $x = 0, z = 0$ và mặt phẳng $x = a$ ($a \neq 0$).

Bài 66. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$

a) quanh trục Ox một vòng

b) quanh trục Oy một vòng

Bài 67. Tính độ dài đường cong

a) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ khi x biến thiên từ 1 đến 2

b) $\begin{cases} x = a \left(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right) \\ y = a \sin t \end{cases}$ khi t biến thiên từ $\frac{\pi}{3}$ đến $\frac{\pi}{2}$, $(a > 0)$

Bài 68. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau

a) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ quay quanh trục Ox

b) $y = \frac{1}{3}(1 - x)^3, 0 \leq x \leq 1$ quay quanh trục Ox

Chương 3

Hàm số nhiều biến số

3.1 Các khái niệm cơ bản

Bài 69. Tìm miền xác định của các hàm số sau

$$\text{a) } z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} \qquad \text{c) } z = \arcsin \frac{y-1}{x}$$

$$\text{b) } z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)} \qquad \text{d) } z = \sqrt{x \sin y}$$

Bài 70. Tìm các giới hạn (nếu có) của các hàm số sau

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$$

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + 3xy}, \quad (x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty)$$

$$\text{c) } f(x, y) = \frac{(x-1)^3 - (y-2)^3}{(x-1)^2 + (y-2)^2}, \quad (x \rightarrow 1, y \rightarrow 2)$$

$$\text{d) } f(x, y) = \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$$

$$\text{e) } f(x, y) = \frac{x(e^y - 1) - y(e^x - 1)}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$$

$$\text{f) } f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$$

Bài 71. Tính các giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

$$\text{b) } \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

3.2 Đạo hàm riêng và vi phân

Bài 72. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad z = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) & \text{c)} \quad z = \arctan \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} & \text{e)} \quad u = x^{y^z}, (x, y, z > 0) \\ \text{b)} \quad z = y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{d)} \quad z = x^{y^3}, (x > 0) & \text{f)} \quad u = e^{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{array}$$

Bài 73. Khảo sát sự liên tục của hàm số và sự tồn tại các đạo hàm riêng của nó

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad f(x, y) = \begin{cases} x \arctan \left(\frac{y}{x} \right)^2, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0. \end{cases} \\ \text{b)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}, & \text{nếu } (x, y) \neq (0; 0), \\ 0, & \text{nếu } (x, y) = (0; 0). \end{cases} \end{array}$$

Bài 74. Giả sử $z = yf(x^2 - y^2)$, ở đây f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x} z_x' + \frac{1}{y} z_y' = \frac{z}{y^2}.$$

Bài 75. Tìm đạo hàm riêng các hàm số hợp sau đây

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{b)} \quad z = \ln(u^2 + v^2), u = xy, v = \frac{x}{y} \\ \text{c)} \quad z = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3 \end{array}$$

Bài 76. Cho f là hàm số khả vi đến cấp hai trên \mathbb{R} . Chứng minh rằng hàm số $\omega(x, t) = f(x - 3t)$ thỏa mãn phương trình truyền sóng $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$.

Bài 77. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad z = \sin(x^2 + y^2) & \text{c)} \quad z = \arctan \frac{x + y}{x - y} \\ \text{b)} \quad z = \ln \tan \frac{y}{x} & \text{d)} \quad u = x^{y^2 z} \end{array}$$

Bài 78. Ứng dụng vi phân, tính gần đúng

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad A = \sqrt[3]{(1, 02)^2 + (0, 05)^2} & \text{c)} \quad C = \sqrt{(2, 02)^3 + e^{0,03}} \\ \text{b)} \quad B = \ln \left(\sqrt[3]{1, 03} + \sqrt[4]{0, 98} - 1 \right) & \text{d)} \quad D = (1, 02)^{1,01} \end{array}$$

Bài 79. Cho $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình $z - ye^{\frac{z}{x}} = 0$. Ứng dụng vi phân, tính gần đúng $f(0,99; 0,02)$.

Bài 80. Tìm đạo hàm, đạo hàm riêng của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a) $x^3y - y^3x = a^4$, tính y'

c) $\arctan \frac{x+y}{a} = \frac{y}{a}$, tính y'

b) $x + y + z = e^z$, tính z'_x, z'_y

d) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính z'_x, z'_y .

Bài 81. Cho hàm số ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $2x^2y + 4y^2 + x^2z + z^3 = 3$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}(0; 1), \frac{\partial z}{\partial y}(0; 1)$.

Bài 82. Cho $u = \frac{x+z}{y+z}$, tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình $ze^z = xe^x + ye^y$.

Bài 83. Tìm đạo hàm của hàm số ẩn $y(x), z(x)$ xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Bài 84. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}.$$

Bài 85. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau

a) $z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

c) $z = \arctan \frac{y}{x}$

b) $z = x^2 \ln(x + y)$

d) $z = \sin(x^3 + y^2)$

Bài 86. Tính vi phân cấp hai của hàm số sau:

a) $z = xy^3 - x^2y$

b) $z = e^{2x}(x + y^2)$

c) $z = \ln(x^3 + y^2)$

Bài 87. a) Khai triển hàm số $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 6x + 2y - 4$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $(-2, 1)$.

b) Khai triển Maclaurin hàm số $f(x, y) = e^x \sin y$ đến bậc 3.

3.3 Cực trị của hàm số nhiều biến số

Bài 88. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z = 4x^3 + 6x^2 - 4xy - y^2 - 8x + 2$

d) $z = \frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{xy}{12}$

b) $z = 2x^2 + 3y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$

e) $z = e^{2x}(4x^2 - 2xy + y^2)$

c) $z = 4xy - x^4 - 2y^2$

f) $z = x^3 + y^3 - (x + y)^2$

Bài 89. Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$

b) $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $3x - 4y = 5$

c) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

Bài 90. Tìm một điểm thuộc elip $4x^2 + y^2 = 4$ sao cho nó xa điểm $A(1; 0)$ nhất.

Bài 91. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a) $z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, và $x + y = 6$

b) $z = 4x^2 - 9y^2$ trong miền giới hạn bởi đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$