Chương 3
BIẾN NGẪU NHIÊN NHIỀU CHIỀU

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG[1]

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

[1] Phòng BIS.201-D3.5

3.3. HIỆP PHƯƠNG SAI VÀ HỆ SỐ TƯƠNG QUAN

Hiệp phương sai

Định nghĩa 9

Cho hai biến ngẫu nhiên X và Y có $E(X)$ và $E(Y)$. Hiệp phương sai của hai biến ngẫu nhiên X và Y, ký hiệu là $\text{cov}(X, Y)$, được định nghĩa bởi

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}. \tag{25}$$

✍ Từ (25) và sử dụng tính chất của kỳ vọng,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)\\ &= E(XY) - E(X)E(Y).\end{aligned}$$

Ta nhận được một công thức khác để xác định hiệp phương sai, tương đương với công thức (25).

Định lý 12

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \tag{26}$$

Hiệp phương sai

✍ Hiệp phương sai được dùng làm độ đo quan hệ giữa hai biến X và Y.

(a) Cov$(X, Y) > 0$ cho thấy xu thế Y tăng khi X tăng.

(b) Cov$(X, Y) < 0$ cho thấy xu thế Y giảm khi X tăng.

(c) Phương sai là trường hợp riêng của hiệp phương sai khi $X = Y$ và $V(X) =$ Cov(X, X).

Hiệp phương sai

Ví dụ 19

Biến ngẫu nhiên X và Y trong Ví dụ 3 có hiệp phương sai âm hay dương?

Giải. Khi số sản phẩm loại I tăng lên thì số sản phẩm loại II giảm xuống. Do đó, X và Y có hiệp phương sai âm. Điều này có thể được xác minh bằng việc tính $\text{Cov}(X, Y)$ trong Ví dụ 3.

Hiệp phương sai

Tính chất 4

(a) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.

(b) Nếu X, Y độc lập thì $\text{Cov}(Y, X) = 0$, điều ngược lại chưa chắc đã đúng.

(c) $\text{Cov}(aX, Y) = a\text{Cov}(X, Y)$ với a là hằng số.

(d) $\text{Cov}(X + Z, Y) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Z, Y)$.

Mở rộng, $\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, Y\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Cov}(X_i, Y)$.

Hiệp phương sai

Ví dụ 20

Hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y có bảng phân phối xác suất đồng thời là

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$4/15$	$1/15$	$4/15$
0	$1/15$	$2/15$	$1/15$
1	0	$2/15$	0

(a) Tìm $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(b) X và Y có độc lập không?

Hiệp phương sai

Giải.

(a) Ta có

$$E(X) = (-1) \times \frac{9}{15} + 0 \times \frac{4}{15} + 1 \times \frac{2}{15} = -\frac{7}{15}.$$
$$E(Y) = (-1) \times \frac{5}{15} + 0 \times \frac{5}{15} + 1 \times \frac{5}{15} = 0.$$
$$E(XY) = (-1) \times (-1) \times \frac{4}{15} + (-1) \times (1) \times \frac{4}{15} + 1 \times (-1) \times 0 + 1 \times 1 \times 0 = 0.$$

Suy ra $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$

(b) Dễ thấy $P(X = -1, Y = -1) \neq P(X = -1)P(Y = -1)$ nên X, Y không độc lập.
Trong Ví dụ 20, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ nhưng hai biến ngẫu nhiên X và Y không độc lập.

Hiệp phương sai

✍ Xây dựng công thức tính phương sai từ hiệp phương sai

- Sử dụng định nghĩa phương sai,

$$V(aX + bY + c) = E[(aX + bY + c) - E(aX + bY + c)]^2.$$

- Sử dụng tính chất của kỳ vọng,

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c.$$

- Suy ra

$$\begin{aligned} V(aX + bY + c) &= E\big\{a[X - E(X)] + b[Y - E(Y)]\big\}^2 \\ &= a^2E[X - E(X)]^2 + b^2E[Y - E(Y)]^2 + 2abE\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,\mathsf{Cov}(X, Y). \end{aligned}$$

Hiệp phương sai

Định lý 13

Cho (X, Y) là biến ngẫu nhiên hai chiều, a, b, c là các hằng số. Khi đó

$$V(aX + bY + c) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y). \tag{27}$$

Hệ quả 2

Nếu X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì

$$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y).$$
$$V(aX - bY) = a^2V(X) + b^2V(Y).$$

Đặc biệt,

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y).$$

Ma trận hiệp phương sai

Định nghĩa 10

Ma trận hiệp phương sai của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) được xác định bởi

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X,X) & \text{Cov}(X,Y) \\ \text{Cov}(Y,X) & \text{Cov}(Y,Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(X) & \text{Cov}(X,Y) \\ \text{Cov}(X,Y) & V(Y) \end{bmatrix}$$

Tính chất 5

(a) Ma trận hiệp phương sai là ma trận đối xứng.

(b) Ma trận hiệp phương sai là ma trận của dạng toàn phương không âm.

3.3. HIỆP PHƯƠNG SAI VÀ HỆ SỐ TƯƠNG QUAN

Hệ số tương quan

Định nghĩa 11

Hệ số tương quan của hai biến ngẫu nhiên X và Y, ký hiệu là $\rho_{X,Y}$, được định nghĩa là

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{28}$$

Tính chất 6

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1. \tag{29}$$

Hệ số tương quan

Ví dụ 21

Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối xác suất

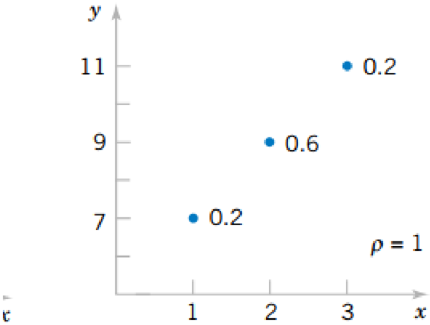
$$P_X(x) = \begin{cases} 0,2, & \text{nếu } x = 1, \\ 0,6, & \text{nếu } x = 2, \\ 0,2, & \text{nếu } x = 3, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

Đặt $Y = 2X + 5$. Khi đó,

$$P_Y(y) = \begin{cases} 0,2, & \text{nếu } y = 7, \\ 0,6, & \text{nếu } y = 9, \\ 0,2, & \text{nếu } y = 11, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

Phân phối xác suất đồng thời của X và Y được cho trong Hình 4. Vì X và Y có quan hệ tuyến tính nên $\rho_{X,Y} = 1$. Việc kiểm tra kết quả này xem như bài tập.

Hệ số tương quan



Hình 4: Phân phối đồng thời trong Ví dụ 21

Hệ số tương quan

Định lý 14

Nếu X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì

$$\rho_{X,Y} = 0. \tag{30}$$

Ví dụ 22

Cho hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời là

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16}xy, & 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\rho_{X,Y} = 0$.

Hệ số tương quan

Giải. Trước hết ta tính

$$E(X) = \int_0^2 \Big(\frac{1}{16}\int_0^4 x^2 y dy\Big) dx = \frac{4}{3}; \quad E(Y) = \int_0^2 \Big(\int_0^4 xy^2 dy\Big) dx = \frac{8}{3},$$

$$E(XY) = \int_0^2 \Big(\int_0^4 x^2 y^2 dy\Big) dx = \frac{32}{9}.$$

Suy ra

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{32}{9} - \frac{4}{3} \times \frac{8}{3} = 0.$$

Do đó, $\rho_{X,Y} = 0$.

✍ Ta cũng chỉ ra rằng hai biến ngẫu nhiên này độc lập bằng cách chỉ ra $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ với mọi x, y.

3.3. HIỆP PHƯƠNG SAI VÀ HỆ SỐ TƯƠNG QUAN

Bài tập

Bài 26

Biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) được gọi là không tương quan nếu:

A. $\text{Cov}(X, Y) - E(XY) = 0$

B. $E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

C. $E(X)E(Y) = 0$

D. $E(XY) = 0$

E. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Bài 27

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y), khi đó $E(3X - 4Y)$ bằng:

A. $3E(X) + 4E(Y)$

B. $3E(X) - 4E(Y)$

C. $9E(X) + 16E(Y)$

D. $9E(X) - 16E(Y)$

Bài tập

Bài 28

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập, khi đó phương sai $V(3X - 4Y)$ bằng:

A. $3V(X) + 4V(Y)$

B. $9V(X) - 16E(Y)$

C. $9V(X) + 16V(Y)$

D. $3V(X) - 4E(Y)$

Bài 29

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) bất kỳ, khi đó phương sai $V(2X - 5Y)$ bằng

A. $4V(X) - 25V(Y)$

B. $4V(X) + 25E(Y)$

C. $4V(X) + 25V(Y) - 20\mathrm{Cov}(X, Y)$

D. $4V(X) - 25E(Y) + 20\mathrm{Cov}(X, Y)$

Bài tập

Bài 30

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) nhận giá trị trên cùng một không gian mẫu S. Khi đó, $\text{Cov}(X+Y, X-Y)$ bằng:

A. $V(X) - V(Y)$

B. $V(X) + V(Y)$

C. $V(X^2) - V(Y^2)$

D. $V(X^2) - V(Y^2)$

E. $V(X^2) - 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y^2)$

F. $V(X)^2 - V(Y)^2$

Bài tập

Bài 31

Giả sử c là một hằng số. Tính chất nào sau đây của $\text{Cov}(X, Y)$ của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) là SAI:

A. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$

B. $\text{Cov}(X, X) = V(X)$

C. $\text{Cov}(X + c, Y) = \text{Cov}(X, Y)$

D. $\text{Cov}(cX, Y) = c\text{Cov}(X, Y)$

E. $\text{Cov}(X, Y) \geq 0$

Bài tập

Bài 32

Cho biến ngẫu nhiên X và Y có bảng phân phối xác suất đồng thời là:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,17	0,13	0,25
2	0,10	0,30	0,05

Tìm hệ số tương quan $\rho_{X,Y}$.

Bài tập

Bài 33

Trọng lượng của những người chồng là biến ngẫu nhiên X tuân theo luật phân phối chuẩn với kỳ vọng 70 kg và độ lệch chuẩn 9 kg, còn trọng lượng của những người vợ là biến ngẫu nhiên Y tuân theo luật phân phối chuẩn với kỳ vọng 55 kg và độ lệch chuẩn 4 kg. Hệ số tương quan trọng lượng giữa vợ và chồng là $\frac{2}{3}$.

(a) Tìm $E(X-Y)$.

(b) Tìm $V(X-Y)$.

(c) Tính xác suất vợ nặng hơn chồng.