Chương 1
SỰ KIỆN NGẪU NHIÊN VÀ PHÉP TÍNH XÁC SUẤT

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG[1]

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

[1]Phòng 201.BIS-D3.5

1.3. XÁC SUẤT CỦA MỘT SỰ KIỆN

Khái niệm xác suất

Khái niệm 4

Tiến hành một phép thử và gọi A là một sự kiện nào đó liên quan đến phép thử. Xác suất của sự kiện A là một số nằm giữa 0 và 1, số này đo lường khả năng xuất hiện của sự kiện A.
Ký hiệu xác suất của sự kiện A là $P(A)$.

1.3. XÁC SUẤT CỦA MỘT SỰ KIỆN

Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển

Khái niệm 5

Các kết cục của một phép thử được gọi là đồng khả năng nếu khả năng xảy ra của chúng là như nhau.

✍ Chẳng hạn, trong một phép thử có n kết cục có thể xảy ra, các kết cục này là đồng khả năng nếu khả năng xảy ra của mỗi kết cục đều là $1/n$.

Định nghĩa 14

Giả sử trong một phép thử có n kết cục đồng khả năng, trong đó, có m kết cục thuận lợi cho sự xuất hiện của sự kiện A. Khi đó,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{số kết cục thuận lợi cho } A}{\text{tổng số kết cục đồng khả năng có thể có}}. \tag{8}$$

Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển

SAMI 1956

Tính chất 2

(a) Nếu A là một sự kiện bất kỳ thì $0 \leq P(A) \leq 1$.

(a) $P(S) = 1$.

(b) $P(\varnothing) = 0$.

(c) Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \leq P(B)$.

Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển

Ví dụ 19

Một người khi gọi điện thoại quên mất 2 số cuối cùng của số điện thoại cần gọi mà chỉ nhớ được rằng chúng khác nhau. Tìm xác suất để người đó chọn ngẫu nhiên một số để gọi thì được đúng số cần gọi.

Giải. Gọi A là sự kiện "người đó chọn được đúng số cần gọi".

- Số kết cục đồng khả năng có thể có là $n = A_{10}^2 = 90$.
- Số kết cục thuận lợi cho sự kiện A là $m = 1$.
- Vậy $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{90}$.

Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển

Ví dụ 20

Từ bộ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài đã trộn kỹ rút ngẫu nhiên ra hai quân bài. Tính xác suất xảy ra các sự kiện sau:

(a) Hai quân bài rút ra đều là J.

(b) Trong hai quân bài rút ra có một quân J, một quân K.

Giải. Số kết cục đồng khả năng có thể có là $n = C_{52}^2 = 1326$.
Gọi A là sự kiện "hai quân rút ra đều là J"; B là sự kiện "trong hai quân rút ra có một cây J, một cây K".

(a) Số kết cục thuận lợi cho sự kiện A là $m_A = C_4^2 = 6$, suy ra $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{6}{1326} = \frac{1}{221}$.

(b) Số kết cục thuận lợi cho sự kiện B là $m_B = C_4^1 \times C_4^1 = 16$, suy ra $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{8}{663}$.

Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển

Ví dụ 21

Ba nữ nhân viên phục vụ A, B và C thay nhau rửa đĩa chén và giả sử ba người này đều "khéo léo" như nhau. Trong một tháng có 4 chiếc chén khác nhau bị vỡ. Tìm xác suất để:

(a) Chị A đánh vỡ 3 chén và chị B đánh vỡ 1 chén;

(b) Một trong ba người đánh vỡ 3 chén;

(c) Một trong ba người đánh vỡ cả 4 chén.

Giải. Số kết cục đồng khả năng có thể có là $n = 3^4$.

(a) Số kết cục thuận lợi cho sự kiện D "chị A đánh vỡ 3 chén và chị B đánh vỡ 1 chén" là $m_D = C_4^3 \times 1 = 4$, suy ra $P(D) = \frac{4}{81} \approx 0,0494$.

(b) Số kết cục thuận lợi cho sự kiện E "một trong 3 người đánh vỡ 3 chén" là $m_E = C_3^1 \times C_4^3 \times 2 = 24$, nên $P(E) = \frac{24}{81} \approx 0,2963$.

(c) Số kết cục thuận lợi cho sự kiện F "một trong 3 người đánh vỡ 4 chén" là $m_F = C_3^1 \times C_4^4 = 3$. Vậy $P(F) = \frac{3}{81} \approx 0,037$.

Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển

✍ Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển có ưu điểm là dễ vận dụng, tuy nhiên, định nghĩa này chỉ áp dụng được với các phép thử ngẫu nhiên có hữu hạn kết cục đồng khả năng. Trong trường hợp có vô hạn kết cục đồng khả năng ta sử dụng định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học.

1.3. XÁC SUẤT CỦA MỘT SỰ KIỆN

Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học

Định nghĩa 15

Giả sử một phép thử có vô hạn kết cục đồng khả năng và các kết cục này được biểu thị bởi một miền hình học G (có độ đo hữu hạn và khác 0), còn các kết cục thuận lợi cho sự kiện A được biểu thị bởi miền con H của G. Khi đó,

$$P(A) = \frac{\text{độ đo của } H}{\text{độ đo của } G}. \tag{9}$$

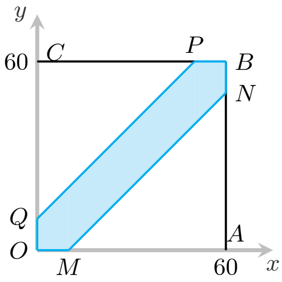
✍ Tùy theo G là đoạn thẳng, miền phẳng hay khối không gian mà độ đo được hiểu là độ dài, diện tích hay thể tích.

Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học

Ví dụ 22

Hai người bạn hẹn gặp nhau ở một địa điểm trong khoảng thời gian từ 7h00 đến 8h00. Mỗi người có thể đến điểm hẹn một cách ngẫu nhiên tại một thời điểm trong khoảng thời gian nói trên và họ quy ước rằng ai đến mà không thấy người kia thì chỉ đợi trong vòng 10 phút. Tính xác suất để hai người gặp nhau.

Giải. Gọi x và y lần lượt là thời điểm đến điểm hẹn của hai người, $0 \leq x, y \leq 60$.



Hình 7: Minh họa cho Ví dụ 22

Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học

- Mỗi cặp thời điểm đến (x, y) của hai người là một điểm của miền

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 60;\ 0 \leq y \leq 60\} \quad \text{(hình vuông } OABC\text{)}.$$

- Gọi E là sự kiện "hai người gặp nhau", khi đó, E được biểu diễn bởi

$$H = \{(x,y) \in G \mid |x-y| \leq 10\} \quad \text{(đa giác } OMNBPQ\text{)}.$$

- Sử dụng định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học,

$$P(E) = \frac{\text{diện tích } H}{\text{diện tích } G} = \frac{\text{diện tích } (OMNBPQ)}{\text{diện tích } (OABC)} = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = \frac{11}{36} \approx 0,3056.$$

Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học

✍ Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển và định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học chỉ áp dụng được với các phép thử ngẫu nhiên có kết cục đồng khả năng xảy ra. Trong nhiều bài toán thực tế, việc tính hết các kết cục của một phép thử không dễ dàng, bên cạnh đó điều kiện các kết cục đồng khả năng thường khó thỏa mãn.

1.3. XÁC SUẤT CỦA MỘT SỰ KIỆN

Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê

Định nghĩa 16

Giả sử trong một điều kiện nào đó ta có thể lặp lại n lần một phép thử và thấy có x lần xuất hiện sự kiện A. Khi đó, x được gọi là tần số và tỷ số x/n gọi là tần suất xuất hiện sự kiện A, ký hiệu là $f_n(A)$.
Như vậy,

$$f_n(A) = \frac{x}{n}. \tag{10}$$

Ví dụ 23

Để xác định tần suất xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu nhiều lần, người ta ghi lại kết quả sau:

Người thí nghiệm	Số lần tung (n)	Số lần xuất hiện mặt sấp (x)	Tần suất (f_n)
Buffon	4040	2048	0,5069
Pearson	12000	6019	0,5016
Pearson	24000	12012	0,5005

Ta thấy rằng khi số lần tung đồng xu càng lớn, tần suất xuất hiện mặt sấp càng gần với xác suất xuất hiện mặt sấp là 0,5 (tính bằng Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển).

Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê

Định nghĩa 17

Khi số phép thử tăng lên vô hạn, tần suất xuất hiện sự kiện A tiến dần đến một số xác định p nào đó. Số p đó được gọi là xác suất của sự kiện A (theo quan điểm thống kê).

✍ Theo Định nghĩa 17,

$$P(A) := \lim_{n\to\infty} f_n(A).$$

Trong thực tế, nếu n đủ lớn ta có thể lấy

$$P(A) \approx f_n(A).$$

Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê

Ví dụ 24

Bằng định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê, người ta đã tìm được xác suất để sinh con trai trong mỗi lần sinh là $p = 0,518$, con số này hầu như không thay đổi theo thời gian, địa phương và chủng tộc.

- Nhà toán học Laplace trong 10 năm liền theo dõi ở thành phố Petersburg, London và Berlin thấy tỷ số đó là 22/43. Ông cũng đã theo dõi 40 năm liền ở Paris thấy tỷ số đó là 25/49.
- Nhà toán học Crema theo dõi ở Sweden năm 1935 cũng thấy tỷ số đó là 0,518.

Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê

✍

- Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê khắc phục được một nhược điểm của định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển là không dùng đến khái niệm đồng khả năng.
- Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê không giúp ta tính được chính xác xác suất của một sự kiện mà chỉ tìm được giá trị gần đúng; đồng thời số phép thử phải đủ lớn và chỉ dùng được cho các phép thử có thể lặp lại nhiều lần một cách độc lập trong các điều kiện giống nhau.

1.3. XÁC SUẤT CỦA MỘT SỰ KIỆN

Bài tập

Bài 11

Từ một bộ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài đã được trộn kỹ rút ngẫu nhiên ra ba quân bài. Tính xác suất để:

(a) Ba quân bài được rút ra đều là J.

(b) Trong ba quân bài được rút ra có một cây K, một cây Q, một cây J.

(c) Ba quân bài được rút ra là đồng chất.

Bài 12

Một đường dây điện thoại ngầm nối một tổng đài với một trạm dài 1 kilômét bị đứt ngẫu nhiên tại một điểm. Tính xác suất để điểm đứt cách tổng đài không quá 100 mét.

Bài tập

Bài 13

Số liệu trên thế giới về số người bị nhiễm cúm Virus Corona (COVID-19) cập nhật lúc 17h30 ngày 25/7/2020 như sau: Số người mắc là 15 968 357; số người tử vong là 643 384. Dưới đây là số liệu của 6 nước có số người bị nhiễm COVID-19 cao nhất tại thời điểm đó:

Quốc gia	Số người nhiễm	Số người tử vong
Mỹ	4 248 492	148 492
Bra-xin	2 348 200	85 385
Ấn Độ	1 339 176	31 425
Nga	806 720	13 192
Nam Phi	421 996	6 343
Mê-hi-cô	378 285	42 645

(a) Xác suất người bị chết do nhiễm bệnh COVID-19 là bao nhiêu?

(b) Người dân đang ở nước nào có xác suất chết do nhiễm bệnh COVID-19 là cao nhất/thấp nhất trong 6 nước được xét?

Bài tập

Bài 14

Trong một thành phố có 5 khách sạn. Có 3 khách du lịch đến thành phố đó, mỗi người chọn ngẫu nhiên một khách sạn để nghỉ. Tìm xác suất để:

(a) Mỗi người khách ở một khách sạn khác nhau.

(b) Có đúng hai người khách ở cùng một khách sạn.

Bài 15

Cho đoạn thẳng AB có độ dài 10 centimét. Lấy một điểm C bất kỳ trên đoạn thẳng đó. Tính xác suất để chênh lệch độ dài giữa hai đoạn thẳng AC và CB không vượt quá 4 centimét.