Chương 1
SỰ KIỆN NGẪU NHIÊN VÀ PHÉP TÍNH XÁC SUẤT

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG[1]

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

[1] Phòng 201.BIS-D3.5

1.5. CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ. CÔNG THỨC BAYES

Công thức xác suất đầy đủ

Cho $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ là một hệ đầy đủ các sự kiện và A là một sự kiện nào đó. Khi đó,

$$A = AS = A(B_1 + B_2 + \cdots + B_n) = AB_1 + AB_2 + \cdots + AB_n.$$

Vì các AB_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, xung khắc từng đôi, nên

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i).$$

Sử dụng công thức nhân xác suất $P(AB_i) = P(B_i)P(A|B_i)$ ta nhận được công thức dưới đây.

Định lý 4

Giả sử các sự kiện $B_1, B_2, \ldots, B_n$ lập thành một hệ đầy đủ và A là một sự kiện nào đó. Khi đó,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i). \tag{24}$$

Công thức xác suất đầy đủ

✍

- Công thức (24) được gọi là công thức xác suất đầy đủ (hay công thức xác suất toàn phần).
- Công thức (24) cho phép ta tính xác suất $P(A)$ với A là một sự kiện bất kỳ của phép thử nếu biết các xác suất $P(B_i)$ của hệ đầy đủ $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ và $P(A|B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ví dụ 32

Một nhà máy có ba phân xưởng sản xuất ra cùng một loại sản phẩm. Xác suất để phân xưởng I, phân xưởng II và phân xưởng III sản xuất được sản phẩm loại một lần lượt là 0,7, 0,8 và 0,6. Từ một lô hàng gồm 20% sản phẩm của phân xưởng I, 50% sản phẩm của phân xưởng II và 30% sản phẩm của phân xưởng III người ta lấy ra một sản phẩm để kiểm tra. Tính xác suất để sản phẩm được kiểm tra là loại một.

Công thức xác suất đầy đủ

Giải.

- Gọi A là sự kiện "sản phẩm được kiểm tra là loại một"; B_1, B_2, B_3 lần lượt là sự kiện "sản phẩm được kiểm tra do phân xưởng I, II và III sản xuất".
- Hệ $\{B_1, B_2, B_3\}$ tạo thành một hệ đầy đủ với $P(B_1) = 0,2$, $P(B_2) = 0,5$ và $P(B_3) = 0,3$.
- Áp dụng công thức xác suất đầy đủ (24) với $P(A|B_1) = 0,7$, $P(A|B_2) = 0,8$ và $P(A|B_3) = 0,6$ ta nhận được

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \\ &= 0,2 \times 0,7 + 0,5 \times 0,8 + 0,3 \times 0,6 = 0,72 = 72\%. \end{aligned}$$

- Ý nghĩa của xác suất này là tỷ lệ sản phẩm loại một của nhà máy.

Công thức Bayes

Cho $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ là một hệ đầy đủ các sự kiện và A là một sự kiện nào đó. Giả sử A đã xảy ra. Sử dụng định nghĩa xác suất điều kiện và công thức nhân xác suất,

$$P(B_k|A) = \frac{P(AB_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

trong đó $P(A)$ được xác định bởi công thức xác suất đầy đủ (24).

Định lý 5

Giả sử một phép thử có một hệ đầy đủ $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ và A là một sự kiện nào đó. Khi đó, các xác suất $P(B_k|A)$ được xác định bởi:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{25}$$

Công thức Bayes

✍

- Các xác suất $P(B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ đã được xác định từ trước, thường được gọi là xác suất tiên nghiệm.
- Các xác suất $P(B_i|A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ được xác định sau khi đã có kết quả thí nghiệm nào đó thể hiện qua sự xuất hiện của A, thường gọi là xác suất hậu nghiệm. Như vậy, công thức Bayes cho phép đánh giá lại xác suất xảy ra các sự kiện B_i sau khi đã có thêm thông tin về A.

✍

- Muốn dùng công thức xác suất đầy đủ (24) hoặc công thức Bayes (25) nhất định phải xác định được một hệ đầy đủ thích hợp.
- Nếu (24) cho ta xác suất không có điều kiện thì (25) cho phép tính xác suất có điều kiện, trong đó sự kiện B_i cần tính xác suất phải là một thành viên của nhóm đầy đủ đang xét. Từ đó thấy rằng việc dùng công thức Bayes để tính xác suất có điều kiện đã gợi ý cho ta cách chọn nhóm đầy đủ sao cho sự kiện quan tâm phải là thành viên.

Công thức Bayes

Ví dụ 33

Trong Ví dụ 32, nếu sản phẩm được kiểm tra là loại một, thì sản phẩm này có khả năng do phân xưởng nào sản xuất?

Giải. Áp dụng công thức Bayes (25) và sử dụng kết quả của Ví dụ 32, ta tính

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{0,2 \times 0,7}{0,72} \approx 0,1944.$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{0,5 \times 0,8}{0,72} \approx 0,5556.$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{0,3 \times 0,6}{0,72} = 0,25.$$

Chú ý rằng $P(B_1|A) + P(B_2|A) + P(B_3|A) = 1$, vì sản phẩm loại một đó có thể do phân xưởng I, II hoặc III sản xuất. Do $P(B_2|A)$ là lớn nhất, nên khả năng sản phẩm loại một được kiểm tra do phân xưởng II sản xuất.

Công thức Bayes

Ví dụ 34

Có hai lô sản phẩm: lô I có 7 chính phẩm 3 phế phẩm; lô II có 6 chính phẩm 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ lô I bỏ sang lô II, sau đó từ lô II lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm.

(a) Tính xác suất để 2 sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm.

(b) Giả sử 2 sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm. Hãy tính xác suất để 2 chính phẩm này là của lô I.

Công thức Bayes

Giải.

(a) Gọi A là sự kiện "hai sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm"; B_i là sự kiện "trong 2 sản phẩm lấy từ lô I bỏ sang lô II có i chính phẩm", $i = 0, 1, 2$. Khi đó B_0, B_1, B_2 tạo thành một hệ đầy đủ với

$$P(B_0) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15};\ P(B_1) = \frac{C_7^1 \times C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15};\ P(B_2) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}.$$

- Tính
$$P(A|B_0) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45};\ P(A|B_1) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{21}{45};\ P(A|B_2) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

- Áp dụng công thức xác suất đầy đủ (24)
$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_0)P(A|B_0) + P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) \\ &= \frac{1}{15} \times \frac{15}{45} + \frac{7}{15} \times \frac{21}{45} + \frac{7}{15} \times \frac{28}{45} = \frac{358}{675} \approx 0,5304. \end{aligned}$$

(b) Ta không thể chọn nhóm đầy đủ như trong ý (a), vì sự kiện cần tính xác suất không là thành viên của nhóm này. Việc chọn nhóm đầy đủ thích hợp xem như là bài tập.

Bài tập

Bài 25

Cho A, B, C và D là bốn sự kiện tạo thành một hệ đầy đủ. Giả sử $P(A+B) = 0,5$; $P(B+C+D) = 0,8$. Giá trị $P(B)$ bằng:

A. $0,3$

B. $0,2$

C. $0,4$

D. $0,5$

Bài 26

Tỷ lệ người nghiện thuốc lá ở một vùng là 30%. Biết rằng tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người nghiện thuốc là 60%, còn tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người không nghiện là 40%.

(a) Lấy ngẫu nhiên một người thấy người ấy bị viêm họng. Tính xác suất người đó nghiện thuốc lá.

(b) Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất người đó nghiện thuốc lá.

Bài tập

Bài 27

Một trạm phát sóng chỉ phát hai loại tín hiệu A và B với xác suất tương ứng là 0,84 và 0,16. Do có nhiễu trên đường truyền nên $1/6$ tín hiệu A bị méo và được thu như là tín hiệu B, còn $1/8$ tín hiệu B bị méo thành tín hiệu A.

(a) Tìm xác suất thu được tín hiệu A.

(b) Giả sử thu được tín hiệu A, tìm xác suất để thu được đúng tín hiệu lúc phát.

Bài 28

Có ba hộp sản phẩm, mỗi hộp có 10 sản phẩm trong đó số sản phẩm loại I trong ba hộp tương ứng là 5, 6 và 9. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một sản phẩm để trưng bày. Khách hàng đến lấy ngẫu nhiên một trong ba sản phẩm trên để mua.

(a) Tính xác suất khách hàng lấy được sản phẩm loại I.

(b) Biết rằng khách hàng lấy được sản phẩm loại I, tính xác suất sản phẩm đó của hộp thứ nhất.

Bài tập

Bài 29

Một người có ba chỗ ưa thích như nhau để câu cá. Xác suất để câu được cá ở mỗi chỗ tương ứng là 0,6; 0,7 và 0,8. Biết rằng đến một chỗ người đó thả câu 3 lần và chỉ câu được một con cá. Tính xác suất để cá câu được ở chỗ thứ nhất.

Bài 30

Ba người thợ cùng may một loại áo với xác suất may được sản phẩm chất lượng cao tương ứng là 0,9; 0,9 và 0,8. Biết một người khi may 8 áo thì có 6 sản phẩm chất lượng cao. Tìm xác suất để người đó may 8 áo nữa thì có 6 áo chất lượng cao.