Chương 1
SỰ KIỆN NGẪU NHIÊN VÀ PHÉP TÍNH XÁC SUẤT

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG[1]

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

[1] Phòng 201.BIS-D3.5

1.2. PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

Quy tắc cộng. Quy tắc nhân

Quy tắc 1

Nếu một công việc có k phương án khác nhau để thực hiện, phương án một có n_1 cách thực hiện xong công việc, phương án hai có n_2 cách thực hiện xong công việc, ..., phương án k có n_k cách thực hiện xong công việc và không có một cách thực hiện nào ở phương án này lại trùng với một cách thực hiện ở phương án khác. Khi đó ta có

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \tag{1}$$

cách thực hiện công việc.

Quy tắc cộng. Quy tắc nhân

Quy tắc 2

Giả sử một công việc nào đó được chia thành k giai đoạn. Có n_1 cách thực hiện giai đoạn thứ nhất, n_2 cách thực hiện giai đoạn thứ hai, ..., n_k cách thực hiện giai đoạn thứ k. Khi đó ta có

$$n = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k \tag{2}$$

cách thực hiện công việc.

Quy tắc cộng. Quy tắc nhân

Ví dụ 13

Giả sử để đi từ A đến C có thể đi qua B, trong đó có 2 đường khác nhau đi trực tiếp từ A đến C, có 3 đường khác nhau để đi từ A đến B và có 2 đường khác nhau để đi từ B đến C. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C?

Giải.

- Đi từ A đến C có 2 lựa chọn: Đi trực tiếp từ A đến C có $n_1 = 2$ cách;
- Đi gián tiếp từ A đến C thông qua B có $n_2 = 3 \times 2 = 6$ cách.
- Tổng số cách đi từ A đến C là $n = n_1 + n_2 = 2 + 6 = 8$ cách.

1.2. PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

Chỉnh hợp. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa 9

Một chỉnh hợp chập k của n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho ($k \leq n$). Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1). \tag{3}$$

Ví dụ 14

Một bảng mạch in có tám vị trí khác nhau, mỗi vị trí có thể đặt được một thành phần của mạch. Nếu bốn thành phần khác nhau được đặt trên bảng mạch thì có thể có bao nhiêu kiểu dáng khác nhau?

Giải. Mỗi thiết kế bao gồm việc chọn một vị trí từ tám vị trí cho thành phần đầu tiên, một vị trí từ bảy vị trí còn lại cho thành phần thứ hai, một vị trí từ sáu vị trí còn lại cho thành phần thứ ba và một vị trí từ năm vị trí còn lại cho thành phần thứ tư. Vì vậy số kiểu dáng thiết kế khác nhau là

$$A_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1860.$$

Chỉnh hợp. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa 10

Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử có thể được lặp lại lấy từ n phần tử đã cho. Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là

$$\widetilde{A}_n^k = n^k. \tag{4}$$

Ví dụ 15

Từ năm chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ lập được bao nhiêu số có ba chữ số?

Giải. Chọn ba chữ số từ năm chữ số có thứ tự và có thể lặp lại. Do đó, số các số được lập là

$$\widetilde{A}_5^3 = 5^3 = 125.$$

1.2. PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

Hoán vị

Định nghĩa 11

Một hoán vị của n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm đủ mặt n phần tử đã cho. Nói cách khác, hoán vị là một chỉnh hợp chập n của n phần tử. Số hoán vị của n phần tử là

$$P_n = A_n^n = n! \tag{5}$$

Ví dụ 16

Có 6 người khách được xếp vào 6 ghế quanh một bàn tròn có 6 chỗ.

(a) Nếu các ghế ngồi đã được đánh số từ 1 đến 6 thì có bao nhiêu cách sắp xếp?

(b) Nếu các ghế ngồi không được đánh số thứ tự thì sẽ có bao nhiêu cách?

Giải.

(a) Nếu các ghế ngồi đã được đánh số từ 1 đến 6 thì ta có $P_6 = 6! = 720$ cách xếp.

(b) Nếu các ghế ngồi không được đánh số thứ tự thì ta có $P_5 = 5! = 120$ cách xếp.

Hoán vị của các phần tử giống nhau

Định nghĩa 12

Số hoán vị của $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ phần tử, trong đó có n_1 phần tử loại thứ nhất, n_2 phần tử loại thứ hai, ..., n_k phần tử loại thứ k, là

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}. \tag{6}$$

Ví dụ 17

Một sản phẩm được dán nhãn bằng cách in năm dòng dày, ba dòng trung bình và hai dòng mỏng. Nếu mỗi thứ tự của mười dòng đại diện cho một nhãn khác nhau, thì có thể tạo ra bao nhiêu nhãn khác nhau bằng cách sử dụng phương pháp này?

Giải. Sử dụng (6), số nhãn khác nhau là

$$\frac{10!}{5!3!2!} = 2520.$$

1.2. PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

Tổ hợp

Định nghĩa 13

Một tổ hợp chập k của n phần tử là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho ($k \leq n$). Số tổ hợp chập k của n phần tử là

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{7}$$

✍ Mối quan hệ giữa số tổ hợp và số chỉnh hợp:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Ví dụ 18

Một lô hàng chứa 60 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm bị lỗi. Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng ra 6 sản phẩm. Có bao nhiêu cách khác nhau để lấy được đúng 2 sản phẩm bị lỗi?

Giải. Sử dụng quy tắc nhân và (7), số cách lấy là

$$C_5^2 \times C_{55}^4 = 10 \times 341055 = 3410550.$$

1.2. PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

Bài tập

Bài 6

Một hộp có 10 quả cầu cùng kích cỡ được đánh số từ 0 đến 9. Từ hộp người ta lấy ngẫu nhiên ra một quả và ghi lại số của quả đó, sau đó trả lại vào trong hộp. Làm như vậy năm lần ta thu được một dãy số có 5 chữ số.

(a) Có bao nhiêu kết quả cho dãy số đó?

(b) Có bao nhiêu kết quả cho dãy số đó sao cho các chữ số trong đó là khác nhau?

Bài 7

Một giải đấu bóng đá có 20 đội, mỗi đội phải thi đấu với đội khác 2 trận (trận sân nhà và trận sân khách). Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu cho giải đấu này?

Bài tập

Bài 8

Từ một bộ bài tú lơ khơ có 52 quân bài, rút ngẫu nhiên và không quan tâm đến thứ tự 4 quân bài. Có bao nhiêu kết cục xảy ra nếu:

(a) 4 quân bài được rút ra đều là J.

(b) Trong 4 quân bài được rút ra có duy nhất một quân J.

(c) Trong 4 quân bài được rút ra có ít nhất một quân J.

(d) Trong 4 quân bài được rút ra có đủ bốn loại rô, cơ, bích, nhép.

Bài tập

Bài 9

Một kiện hàng có 24 sản phẩm, trong số đó có 12 sản phẩm loại I, 8 sản phẩm loại II và 4 sản phẩm loại III. Người ta chọn ngẫu nhiên 4 sản phẩm để kiểm tra. Tính số kết cục để trong 4 sản phẩm đó:

(a) Có ba sản phẩm loại I và một sản phẩm loại II.

(b) Có ít nhất ba sản phẩm loại I.

(c) Có ít nhất một sản phẩm loại III.

Bài 10

Có 3 cô phục vụ A, B và C sau một tháng làm việc làm vỡ 4 chiếc bát khác loại nhau. Biết rằng mỗi bát chỉ do một cô làm vỡ.

(a) Có bao nhiêu kết cục xảy ra?

(b) Có bao nhiêu kết cục xảy ra trường hợp cô A làm vỡ đúng 3 bát?

(c) Có bao nhiêu kết cục xảy ra trường hợp có một cô làm vỡ đúng 3 bát?