Chương 2
BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG(1)

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

(1)Phòng BIS.201-D3.5

2.2. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Hàm xác suất

Định nghĩa 1

Với biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots$, hàm xác suất là hàm $p_X(x)$ thỏa mãn

(a) $p_X(x_i) \geq 0$ với mọi $i = 1, 2, \ldots$;

(b) $\sum_i p_X(x_i) = 1$;

(c) $p_X(x_i) = P(X = x_i)$ với $(X = x_i)$ là sự kiện "X nhận giá trị x_i", $i = 1, 2, \ldots$.

Ví dụ 5

Một bít được truyền qua đường truyền kỹ thuật số có thể bị lỗi. Xác suất để một bít được truyền đi bị lỗi là 0,1. Giả sử rằng các lần truyền là độc lập nhau. Gọi X là số bít bị lỗi trong bốn bít được truyền đi. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên rời rạc và $S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Áp dụng công thức Bernoulli,

$$P(X = 0) = (C_4^0)(0,1)^0(0,9)^4 = 0,6561; \quad P(X = 1) = (C_4^1)(0,1)^1(0,9)^3 = 0,2916;$$
$$P(X = 2) = (C_4^2)(0,1)^2(0,9)^2 = 0,0486; \quad P(X = 3) = (C_4^3)(0,1)^3(0,9)^1 = 0,0036;$$
$$P(X = 4) = (C_4^4)(0,1)^4(0,9)^0 = 0,0001.$$

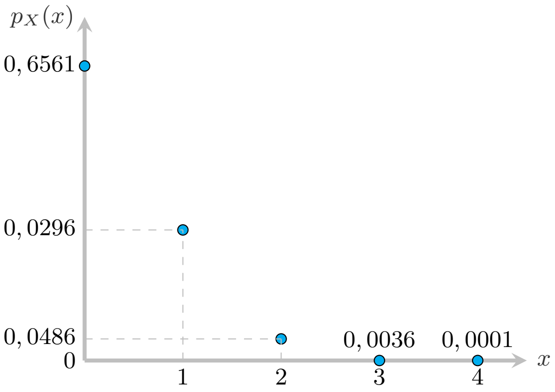
Hàm xác suất

Ví dụ 5 (tiếp theo)

Suy ra, hàm xác suất của X là

$$p_X(x) = \begin{cases} 0,6561 & \text{khi } x = 0, \\ 0,2916 & \text{khi } x = 1, \\ 0,0486 & \text{khi } x = 2, \\ 0,0036 & \text{khi } x = 3, \\ 0,0001 & \text{khi } x = 4, \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Hàm xác suất



Hình 1: Phân phối xác suất của số bít bị lỗi trong Ví dụ 5

Bảng phân phối xác suất

Định nghĩa 2

(a) Giả sử X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận một số hữu hạn giá trị $x_1, \ldots, x_n$ (sắp xếp theo thứ tự tăng dần). Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X có dạng:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

(1)

trong đó, $p_i = p_X(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận một số vô hạn đếm được giá trị thì bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X là:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

(2)

trong đó, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\}$ là tập các giá trị của X được sắp xếp theo thứ tự tăng dần và $p_n = p_X(x_n)$, $n = 1, 2 \ldots$.

Bảng phân phối xác suất

✍ Trong (1), $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ và trong (2), $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$.

Ví dụ 6

Trong Ví dụ 5, bảng phân phối xác suất của X chỉ số bít bị lỗi trong 4 bít được truyền đi là

X	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Bảng phân phối xác suất

Ví dụ 7

Một lô hàng gồm 30 chiếc máy tính xách tay cùng loại được giao cho một cửa hàng bán lẻ, trong đó có 5 chiếc bị lỗi. Một doanh nghiệp chọn mua ngẫu nhiên 3 máy tính từ lô hàng này, hãy tìm phân phối xác suất của số máy bị lỗi.

Giải. Gọi X là "số máy bị lỗi trong 3 máy được chọn", X là biến ngẫu nhiên rời rạc và $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Tính

$$P(X=0) = \frac{C_5^0 C_{25}^3}{C_{30}^3} = \frac{115}{203}, \quad P(X=1) = \frac{C_5^1 C_{25}^2}{C_{30}^3} = \frac{75}{203},$$
$$P(X=2) = \frac{C_5^2 C_{25}^1}{C_{30}^3} = \frac{25}{406}, \quad P(X=3) = \frac{C_5^3 C_{25}^0}{C_{30}^3} = \frac{1}{406}.$$

Vậy bảng phân phối xác suất của X là

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$115/203$	$75/203$	$25/406$	$1/406$

Bảng phân phối xác suất

Ví dụ 8

Với Ví dụ 4, giả sử tất cả các bản fax chỉ gồm 1, 2, 3 hoặc 4 trang với xác suất như nhau. Tìm bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y chỉ chi phí cho một bản fax.

Giải. Theo Ví dụ 4, Y là một biến ngẫu nhiên rời rạc với $S_Y = \{10, 19, 27, 34\}$ và

$$P(Y = 10) = P(X = 1) = 0,25; \quad P(Y = 19) = P(X = 2) = 0,25,$$
$$P(Y = 27) = P(X = 3) = 0,25; \quad P(Y = 34) = P(X = 4) = 0,25.$$

Do đó, bảng phân phối xác suất của Y là

Y	10	19	27	34
$P(Y = y_i)$	0,25	0,25	0,25	0,25

Bảng phân phối xác suất

Ví dụ 9

Một dây chuyền tự động khi hoạt động bình thường có thể sản xuất ra phế phẩm với xác suất $p = 0,001$ và được điều chỉnh ngay lập tức khi phát hiện có phế phẩm. Lập bảng phân phối xác suất của số sản phẩm được sản xuất giữa hai lần điều chỉnh.

Giải. Gọi X là "số sản phẩm được sản xuất giữa hai lần điều chỉnh". Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc và $S_X = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Tính

$$P(X = 1) = 0,001; \quad P(X = 2) = 0,999 \times 0,001, \ \dots$$
$$P(X = n) = (0,999)^{n-1} \times 0,001 \ \dots$$

Vậy bảng phân phối xác suất của X là

X	1	2	...	n	...
$P(X = x_i)$	$0,001$	$0,999 \times 0,001$	...	$(0,999)^{n-1} \times 0,001$	...

2.2. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Định nghĩa hàm phân phối xác suất

Định nghĩa 3

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là $F_X(x)$, được định nghĩa như sau:

$$F_X(x) = P(X < x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

(a) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất (1) thì hàm phân phối là:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ \dots & \\ 1, & x > x_n. \end{cases} \tag{4}$$

Định nghĩa hàm phân phối xác suất

Định nghĩa 3 (tiếp theo)

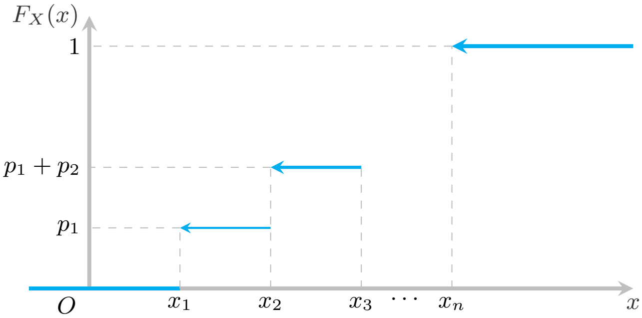
(b) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất (2) thì hàm phân phối là:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1, \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3, \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} p_i, & x_n < x \leq x_{n+1}, \\ \ldots \end{cases} \tag{5}$$

(c) Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì $F_X(x)$ là hàm liên tục.

Định nghĩa hàm phân phối xác suất

✍ Đồ thị của hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc có dạng bậc thang (Hình 2).



Hình 2: Đồ thị của hàm phân phối xác suất (4)

Định nghĩa hàm phân phối xác suất

Ví dụ 10

Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X trong Ví dụ 7.

Giải. Từ bảng phân phối xác suất ở Ví dụ 7, sử dụng (4) suy ra

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{115}{203}, & 0 < x \le 1, \\ \frac{115}{203} + \frac{75}{203}, & 1 < x \le 2, \\ \frac{115}{203} + \frac{75}{203} + \frac{25}{406}, & 2 < x \le 3, \\ \frac{115}{203} + \frac{75}{203} + \frac{25}{406} + \frac{1}{406}, & x > 3. \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{115}{203}, & 0 < x \le 1, \\ \frac{190}{203}, & 1 < x \le 2, \\ \frac{405}{406}, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Định nghĩa hàm phân phối xác suất

✍ Ví dụ 10 cho thấy hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X còn có dạng

$$F_X(x) = P(X < x) = \sum_{x_k < x} p_k \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, $F_X(x)$ trong (4) và (5) còn được gọi là hàm phân phối tích lũy.

Tính chất của hàm phân phối

Tính chất 1

(a) $0 \le F_X(x) \le 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(b) $F_X(x)$ là hàm không giảm, nghĩa là với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ thì $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$.

Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì $F_X(x)$ là hàm gián đoạn với số điểm gián đoạn là số các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên và liên tục bên trái tại những điểm gián đoạn đó.

(c) $P(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì $P(X = a) = 0$ và

$$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a).$$

(d) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Tính chất của hàm phân phối

Ví dụ 11

Gọi X là đường kính của lỗ được khoan trên một sản phẩm kim loại. Kích thước tiêu chuẩn của đường kính được đặt ra là 12,5 milimét. Các tác động ngẫu nhiên trong quá trình khoan dẫn đến đường kính luôn lớn hơn quy định. Dữ liệu lịch sử cho thấy phân phối của X có thể được mô hình hóa bằng hàm phân phối xác suất

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 12,5, \\ 1 - e^{-20(x+k)}, & x > 12,5. \end{cases}$$

(a) Xác định hằng số k.

(b) Nếu một sản phẩm có đường kính lớn hơn 12,6 milimét sẽ bị loại bỏ thì tỷ lệ sản phẩm bị loại bỏ là bao nhiêu?

Tính chất của hàm phân phối

Giải.

(a) Sử dụng Tính chất 1(b), vì $F_X(x)$ liên tục nên

$$\lim_{x\to 12,5^-} F_X(x) = \lim_{x\to 12,5^+} F_X(x), \text{ hay } e^{-20(12,5+k)} = e^0.$$

Suy ra $k = -12,5$.

- Thử lại, với $k = -12,5$, hàm $F_X(x)$ thỏa mãn tất cả các tính chất của hàm phân phối.
- Vậy,

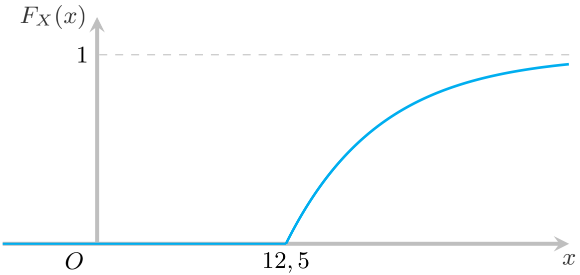
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 12,5, \\ 1 - e^{-20(x-12,5)}, & x > 12,5. \end{cases}$$

Hình 3 mô tả đồ thị của $F_X(x)$.

(b) Sử dụng Tính chất 1(c),

$$P(X > 12,6) = 1 - F_X(12,6) = 1 - (1 - e^{-20(12,6-12,5)}) \approx 0,1353.$$

Tính chất của hàm phân phối



Hình 3: Đồ thị hàm phân phối xác suất của Ví dụ 11

Tính chất của hàm phân phối

Ví dụ 12

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất là

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ A + 3x^2 - Bx^3, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(a) Hãy xác định A và B.

(b) Tính xác suất để trong kết quả của phép thử, X nhận giá trị trong khoảng $(0,5; 1)$.

Tính chất của hàm phân phối

Giải.

(a) Theo Tính chất 1(b), hàm $F_X(x)$ là hàm liên tục nên

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} F_X(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} F_X(x) = F_X(0), \\ \lim\limits_{x\to 1^-} F_X(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} F_X(x) = F_X(1). \end{cases}$$

- Từ đây ta nhận được $\begin{cases} A = 0, \\ A + 3 - B = 1. \end{cases}$ Hay $\begin{cases} A = 0, \\ B = 2. \end{cases}$
- Thử lại, ta thấy với $A = 2$ và $B = 0$, hàm $F_X(x)$ thỏa mãn tất cả các tính chất hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X.

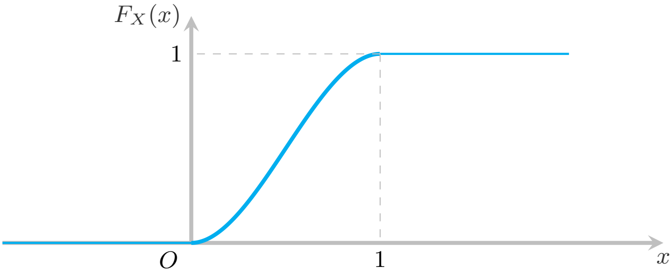
  Vậy

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3x^2 - 2x^3, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Tính chất của hàm phân phối

(b) Sử dụng Tính chất 1(c),

$$
\begin{aligned}
P(0,5 < X < 1) &= F_X(1) - F_X(0,5) \\
&= \left[3 \times (1)^2 - 2 \times (1)^3\right] - \left[3 \times (0,5)^2 - 2 \times (0,5)^3\right] = 0,5.
\end{aligned}
$$



Hình 4: Đồ thị hàm phân phối xác suất của Ví dụ 12

Tính chất của hàm phân phối

Ví dụ 13 (Hàm phân phối Cauchy)

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X có dạng

$$F_X(x) = A + B \arctan x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(a) Tìm A và B.

(b) Tìm xác suất để khi quan sát biến ngẫu nhiên X ba lần độc lập nhau thấy có hai lần X nhận giá trị trong khoảng $(-1; 1)$.

Tính chất của hàm phân phối

Giải.

(a) Sử dụng Tính chất 1(d),

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(A + B\arctan x) = 0, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(A + B\arctan x) = 1, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} A + B \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ A + B \times \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Suy ra $A = {}^1/_2$, $B = {}^1/_\pi$.

- Thử lại, với $A = {}^1/_2$, $B = {}^1/_\pi$, hàm $F_X(x)$ thỏa mãn tất cả các tính chất của hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X.

Vậy

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Tính chất của hàm phân phối

(b) Sử dụng Tính chất 1(c),

$$\begin{aligned} P(-1 < X < 1) &= F_X(1) - F_X(-1) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(1)\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(-1)\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Từ giả thiết, ta có dãy phép thử Bernoulli với $n = 3$, $p = P(-1 < X < 1) = 1/2$. Áp dụng công thức Bernoulli, xác suất cần tìm là

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 (1-p)^1 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}.$$

2.2. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Định nghĩa hàm mật độ xác suất

Định nghĩa 4

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân phối xác suất $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Nếu tồn tại hàm $f_X(x)$ sao cho

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

thì $f_X(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X.

Định lý 1

Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X là đạo hàm bậc nhất của hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên đó,

$$f_X(x) = F'_X(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Tính chất của hàm mật độ

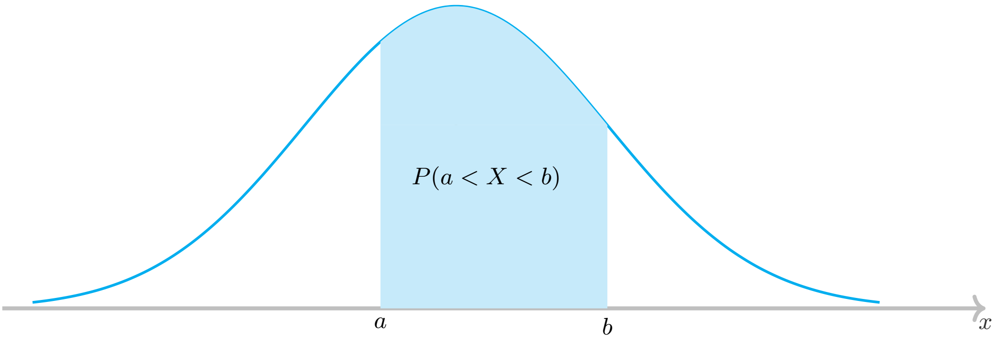
Tính chất 2

(a) $f_X(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(b) $P(a < X < b) = \displaystyle\int_a^b f_X(x)dx.$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$

Tính chất của hàm mật độ



Hình 5: $P(a < X < b)$ là diện tích miền tô màu dưới đường cong $y = f_X(x)$

Tính chất của hàm mật độ

Ví dụ 14

Gọi biến ngẫu nhiên liên tục X là cường độ dòng điện đo được trong một sợi dây đồng mỏng tính bằng miliampe (mA). Giả sử X nhận giá trị trong đoạn $[0; 20 \text{ mA}]$ và hàm mật độ xác suất của X là

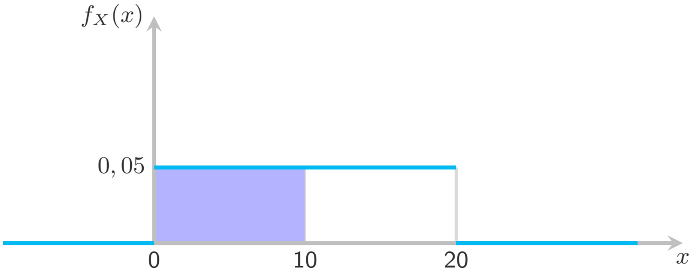
$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 20], \\ 0,05, & x \in [0; 20]. \end{cases}$$

Xác suất để phép đo đo được cường độ dòng điện nhỏ hơn 10 miliampe là bao nhiêu?

Giải. Áp dụng Tính chất 2(b),

$$P(X < 10) = \int_0^{10} f_X(x)dx = \int_0^{10} 0,05dx = 0,5.$$

Tính chất của hàm mật độ



Hình 6: Hàm mật độ và xác suất trong Ví dụ 14

Tính chất của hàm mật độ

Ví dụ 15

Với dữ liệu trong Ví dụ 11,

(a) Tìm hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ của biến ngẫu nhiên X chỉ đường kính của lỗ được khoan trên sản phẩm kim loại.

(b) Sử dụng Tính chất 2(b) tính $P(X > 12,6)$.

Tính chất của hàm mật độ

Giải.

(a) Theo (7), hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X là

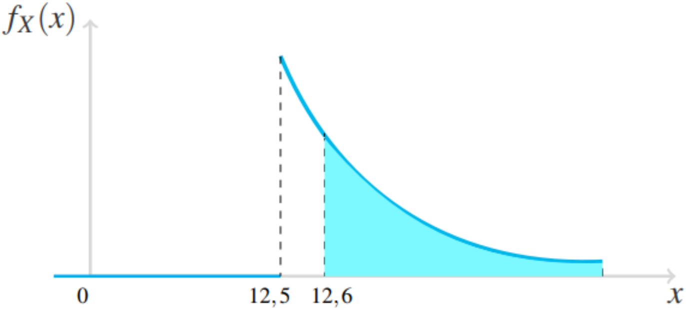
$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 12,5, \\ 20e^{-20(x-12,5)}, & x > 12,5. \end{cases}$$

(b) Theo Tính chất 2(b),

$$P(X > 12,6) = \int_{12,6}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{12,6}^{+\infty} 20e^{-20(x-12,5)}dx = 0,1353.$$

Kết quả này trùng với kết quả tính trong Ví dụ 11(b).

Tính chất của hàm mật độ



Hình 7: Hàm mật độ và xác suất trong Ví dụ 15

Tính chất của hàm mật độ

Ví dụ 16 (Hàm mật độ Laplace)

Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất là

$$f_X(x) = ke^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

(a) Xác định k.

(b) Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X.

Giải.

(a) Sử dụng Tính chất 2(a),(b),

$$\begin{cases} ke^{-|x|} \geq 0, \ \forall x, \\ 1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ke^{-|x|}\, dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} ke^{-x}\, dx. \end{cases}$$

- Từ đây suy ra $k = {}^1/_2$.

Tính chất của hàm mật độ

(b) Ta tìm hàm phân phối xác suất của X theo (6).

- Nếu $x \le 0$, $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{u}du = \frac{1}{2}e^{x}$.
- Nếu $x > 0$, $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{u}du + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-u}du = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$.
- Vậy,

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & \text{nếu } x \le 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

2.2. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Phân phối xác suất của hàm của một biến ngẫu nhiên

Cho X là một biến ngẫu nhiên và $Y = g(X)$, trong đó, $g(.)$ là một hàm số thực cho trước.

- Bảng phân phối xác suất: Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc, hàm xác suất hay bảng phân phối xác suất của $Y = g(X)$ được xác định trực tiếp từ biến ngẫu nhiên X ban đầu.
- Hàm mật độ xác suất: Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục và $g(.)$ là hàm số liên tục, để tìm hàm mật độ xác suất $f_Y(y)$ từ $Y = g(X)$ và hàm mật độ xác suất của X ta sẽ thực hiện theo quy trình hai bước:

1. Tìm $F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y)$.
2. Tìm $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$.

Phân phối xác suất của hàm của một biến ngẫu nhiên

Ví dụ 17

Trong Ví dụ 14, đặt $Y = 100X$. Tìm hàm mật độ xác suất $f_Y(y)$ của Y.

Giải.

- Để tìm hàm mật độ xác suất $f_Y(y)$, trước hết ta tìm hàm phân phối $F_X(x)$.
- Từ Ví dụ 14, suy ra

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,05x, & 0 < x \leq 20, \\ 1, & x > 20. \end{cases}$$

Phân phối xác suất của hàm của một biến ngẫu nhiên

- Sử dụng kết quả này để tìm hàm phân phối $F_Y(y) = P(Y < y) = P(100X < y)$, hay

$$F_Y(y) = P\left(X < \frac{y}{100}\right) = F_X\left(\frac{y}{100}\right) = \begin{cases} 0, & y/100 \le 0, \\ \frac{0{,}05y}{100}, & 0 < y/100 \le 20, \\ 1, & y/100 > 20. \end{cases}$$

- Từ đây suy ra

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{0{,}05}{100}, & 0 < y \le 2000, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Bài tập

Bài 6

Cho Z là biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất:

Z	1	2	3	4
$P(Z = z_i)$	0,2	0,3	p	0,15

(a) Tìm p.

(b) Tính $P(Z \geq 2)$.

(c) Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = 5Z + 2$.

(d) Tìm hàm phân phối xác suất của Y.

Bài tập

Bài 7

Từ một kiện hàng có 15 sản phẩm loại I và 10 sản phẩm loại II, lấy ngẫu nhiên ra ba sản phẩm và ký hiệu X là số sản phẩm loại I lấy được. Lập bảng phân phối xác suất và tìm hàm phân phối xác suất của X.

Bài 8

Ký hiệu X (gam) là biến ngẫu nhiên chỉ trọng lượng tiêu chuẩn của một chiếc điện thoại thông minh do một hãng sản xuất. Biết rằng phân phối xác suất của X có dạng

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 200, \\ 1 - e^{-0,15(x-k)}, & x > 200. \end{cases}$$

Một chiếc điện thoại có trọng lượng trên 220 gam sẽ được coi là không đạt tiêu chuẩn về mặt khối lượng. Tính xác suất để một chiếc điện thoại cùng loại mới được sản xuất là đạt tiêu chuẩn về mặt khối lượng.

Bài tập

Bài 9

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{2} + k \arcsin \frac{x}{2}, & -2 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

(a) Tìm $P(-1 < X < 1)$.

(b) Tìm xác suất để khi quan sát X năm lần một cách độc lập thì có ít nhất một lần X nhận giá trị trong khoảng $(-1; 1)$.

Bài tập

Bài 10

Xác định giá trị tham số k để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} A\sin 5x, & x \in (0, \frac{\pi}{5}), \\ 0, & x \notin (0, \frac{\pi}{5}) \end{cases}$$

là một hàm mật độ xác suất.

Bài 11

Tuổi thọ Y (năm) của một loại động vật hoang dã là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0;16], \\ kx^2(16-x), & y \in [0;16]. \end{cases}$$

Tính xác suất để một cá thể thuộc loại động vật hoang dã này có tuổi thọ dưới 8 tuổi.

Bài tập

Bài 12

Tuổi thọ X (năm) của động cơ máy giặt do một công ty sản xuất là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất là

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 10, \\ \frac{200}{x^3}, & x \geq 10. \end{cases}$$

Biết rằng chính sách bảo hành hiện tại cho động cơ máy giặt là 10 năm. Công ty muốn chạy một chương trình quảng cáo bằng cách tăng thời gian bảo hành, nhưng lại đặt chỉ tiêu tỷ lệ sản phẩm cần bảo hành là không quá 10%. Hỏi công ty nên khuyến mại thêm thời gian bảo hành nhiều nhất là bao nhiêu tháng?

Bài 13

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có dạng hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0;3], \\ kx^2, & x \in [0;3]. \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Y với $Y = 5X + 3$.