Chương 3
BIẾN NGẪU NHIÊN NHIỀU CHIỀU

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG[1]

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

[1] Phòng BIS.201-D3.5

3.2. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Bảng phân phối xác suất đồng thời

Ví dụ 4

Trong Ví dụ 3, cặp giá trị (x, y) có thể có của (X, Y) là $(0;0)$, $(0;1)$, $(0;2)$, $(0;3)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(1;2)$, $(2;0)$, $(2;1)$ và $(3;0)$. Bằng cách tính xác suất tại từng điểm $P(X = x, Y = y)$ với $x = 0;1;2;3$ và $y = 0;1;2;3$ và $x + y \leq 3$,

$$P(X = x, Y = y) = \frac{(C_5^x)(C_4^y)(C_3^{3-x-y})}{C_{12}^3},$$

ta xác định được phân phối xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên X và Y như trong bảng dưới đây.

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	$1/220$	$3/55$	$9/110$	$1/55$
1	$3/44$	$3/11$	$3/22$	0
2	$3/22$	$2/11$	0	0
3	$1/22$	0	0	0

Bảng 1: Bảng phân phối xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên rời rạc trong Ví dụ 3

Bảng phân phối xác suất đồng thời

Định nghĩa 1

Hàm xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y, ký hiệu là $p_{X,Y}(x,y)$, là hàm thỏa mãn

(a) $p_{X,Y}(x,y) \geq 0$ với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} p_{X,Y}(x,y) = 1$.

(c) $p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$.

✍ Miền giá trị của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc (X,Y) là

$$S_{X,Y} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid p_{X,Y}(x,y) > 0\right\}.$$

✍ Hàm xác suất đồng thời $p_{X,Y}(x,y)$ của X và Y được giả thiết là bằng 0 tại mọi $(x,y) \notin S_{X,Y}$.

Bảng phân phối xác suất đồng thời

Định lý 1

Với mọi $A \subset S_{X,Y}$,

$$P[(X,Y) \subset A] = \sum\sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y). \tag{1}$$

Ví dụ 5

Trong Ví dụ 4, nếu $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$, thì

$$P[(X,Y) \subset A] = p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(1,0) = \frac{1}{220} + \frac{3}{55} + \frac{3}{44} = \frac{7}{55}.$$

Bảng phân phối xác suất đồng thời

Định nghĩa 2

Bảng phân phối xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y có dạng

$X \backslash Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n
x_1	$p_{X,Y}(x_1, y_1)$	$\dots$	$p_{X,Y}(x_1, y_j)$	$\dots$	$p_{X,Y}(x_1, y_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$p_{X,Y}(x_i, y_1)$	$\dots$	$p_{X,Y}(x_i, y_j)$	$\dots$	$p_{X,Y}(x_i, y_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$p_{X,Y}(x_m, y_1)$	$\dots$	$p_{X,Y}(x_m, y_2)$	$\dots$	$p_{X,Y}(x_m, y_n)$

Bảng 2: Bảng phân phối xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y

trong đó, x_i, $i = 1, \dots, m$, y_j, $j = 1, \dots, n$, là các giá trị có thể có của các biến thành phần X và Y tương ứng. Bảng này có thể ra vô hạn nếu m, n nhận giá trị ∞.

Hàm phân phối xác suất đồng thời

Định nghĩa 3

Hàm hai biến $F_{X,Y}(x,y)$ xác định bởi

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X < x, Y < y), \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

được gọi là hàm phân phối xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên X và Y.

✍ Từ (2) và Định nghĩa 2, hàm phân phối xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y được xác định bởi

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{X,Y}(x_i, y_j). \tag{3}$$

Ví dụ 6

Từ số liệu của Ví dụ 4 và (3),

$$F_{X,Y}(2;2) = \frac{1}{220} + \frac{4}{55} + \frac{3}{44} + \frac{3}{11} = \frac{11}{55}.$$

Hàm phân phối xác suất đồng thời

Tính chất 1

(a) $0 \leq F_{X,Y}(x, y) \leq 1$ với mọi x, y.

(b) Nếu $x < x_1$, $y < y_1$ thì $F_{X,Y}(x, y) \leq F_{XY}(x_1, y_1)$.

(c) $\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$; $\lim_{x\to\infty, y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = 1$.

(d) Với $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ ta luôn có

$$P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1). \tag{4}$$

Hàm mật độ xác suất đồng thời

Định nghĩa 4

Giả sử $F_{X,Y}(x,y)$ là hàm phân phối xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên liên tục X và Y. Khi đó, hàm mật độ xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên này là hàm hai biến $f_{X,Y}(x,y)$ thỏa mãn:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dudv. \tag{5}$$

Hàm mật độ xác suất đồng thời

Cho trước $F_{X,Y}(x, y)$, Định nghĩa 4 suy ra $f_{X,Y}(x, y)$ là đạo hàm của hàm $F_{X,Y}(x, y)$, nếu đạo hàm này tồn tại.

Định lý 2

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}. \tag{6}$$

Hàm mật độ xác suất đồng thời

✍ Với biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X, Y), thì

$$S_{X,Y} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{X,Y}(x, y) > 0\}.$$

Tính chất 2

(a) $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ với mọi x, y.

(b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1.$

(c) Với $A \subset S_{X,Y}$,

$$P[(X, Y) \subset A] = \iint\limits_{A} f_{X,Y}(x, y) dx dy. \tag{7}$$

Hàm mật độ xác suất đồng thời

Ví dụ 7

Biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X, Y) có hàm mật độ xác suất là

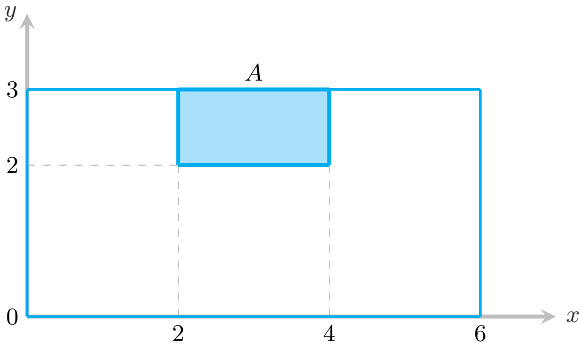
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & 0 \leq x \leq 6,\ 0 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm hằng số k.

(b) Cho $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x < 4;\ 2 \leq y < 3\}$, tính $P[(X,Y) \subset A]$.

Hàm mật độ xác suất đồng thời

Giải. Miền A được minh họa trong Hình 1.



Hình 1: Miền A trong Ví dụ 7

Hàm mật độ xác suất đồng thời

(a) Sử dụng Tính chất 2(a),(b), ta có $k \geq 0$ và

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^6 dx \int_0^3 kdy = 18k.$$

Suy ra, $k = 1/18$.

(b) Sử dụng Tính chất 2(c),

$$P[(X,Y) \in A] = P(2 \leq X < 4; 2 \leq Y < 3) = \int_2^4 dx \int_2^3 \frac{1}{18}dy = \frac{1}{9}.$$

Phân phối xác suất của hàm của hai biến ngẫu nhiên

Xét biến ngẫu nhiên $W := g(X, Y)$, trong đó, X và Y là các biến ngẫu nhiên đã biết luật phân phối và $g(x, y)$ là một hàm hai biến nhận giá trị thực. Ta phân tích phân phối xác suất của W trong một số trường hợp đơn giản.

Định lý 3

Với $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) < w\}$,

$$F_W(w) = P[(X, Y) \subset A]. \tag{8}$$

Phân phối xác suất của hàm của hai biến ngẫu nhiên

Ví dụ 8

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên trong Ví dụ 7. Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $W = \max(X, Y)$.

Giải. Ta có

$$F_W(w) = P(W < w) = P[\max(X, Y) < w] = P(X < w, Y < w) = \iint\limits_D \frac{1}{18} dxdy,$$

trong đó, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x < w, y < w)\}$.

- Nếu $w \leq 0$, $F_W(w) = 0$.
- Nếu $0 < w \leq 3$, $F_W(w) = \int_0^w dx \int_0^w \frac{1}{18} dy = \frac{w^2}{18}$.

Phân phối xác suất của hàm của hai biến ngẫu nhiên

- Nếu $3 < w \leq 6$, $F_W(w) = \int_0^w dx \int_0^3 \frac{1}{18} dy = \frac{w}{6}$.
- Nếu $w > 6$, $F_W(w) = 1$.

Vậy

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } w \leq 0, \\ \frac{w^2}{18} & \text{nếu } 0 < w \leq 3, \\ \frac{w}{6} & \text{nếu } 3 < w \leq 6, \\ 1 & \text{nếu } w > 6. \end{cases}$$

✍ Trong trường hợp biến ngẫu nhiên W liên tục, để tìm hàm mật độ xác suất $f_W(w)$, ta sử dụng tính chất

$$f_W(w) = \frac{dF_W(w)}{dw}. \tag{9}$$

Kỳ vọng của hàm của hai biến ngẫu nhiên

Định lý 4

Cho $W = g(X,Y)$ là một hàm của hai biến ngẫu nhiên X và Y. Khi đó,

$$E(W) = E[g(X,Y)] = \sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} g(x,y) p_{X,Y}(x,y) \tag{10}$$

nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm xác suất đồng thời $p_{X,Y}(x,y)$ và

$$E(W) = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy \tag{11}$$

nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{X,Y}(x,y)$.

Kỳ vọng của hàm của hai biến ngẫu nhiên

Ví dụ 9

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên trong Ví dụ 7. Tìm kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $W = XY$.

Giải. Sử dụng kết quả của Ví dụ 7 và (11),

$$E(W) = \int_0^6 \Big(\int_0^3 xy \frac{1}{18} dy \Big) dx = \int_0^6 \frac{1}{4} x dx = \frac{36}{8} = 4,5.$$

Kỳ vọng của hàm của hai biến ngẫu nhiên

Định lý 5

Cho $h(X,Y)$ và $g(X,Y)$ là các hàm của hai biến ngẫu nhiên X và Y. Khi đó,

$$E[g(X,Y) \pm h(X,Y)] = E[g(X,Y)] \pm E[h(X,Y)].$$

Hệ quả 1

(a) Nếu $g(X,Y) = g(X)$ và $h(X,Y) = h(Y)$ thì ta nhận được

$$E[g(X) \pm h(Y)] = E[g(X)] \pm E[h(Y)].$$

(b) Nếu $g(X,Y) = X$ và $h(X,Y) = Y$ thì

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y).$$

3.2. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Bảng phân phối xác suất biên

Định lý 6

Nếu hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y có hàm xác suất đồng thời là $p_{X,Y}(x,y)$, thì các hàm xác suất biên được xác định bởi

$$p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{X,Y}(x,y) \quad \text{và} \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{X,Y}(x,y). \tag{12}$$

Bảng phân phối xác suất biên

Định lý 7

Nếu hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y có bảng phân phối xác suất đồng thời như trong Định nghĩa 2 thì bảng phân phối xác suất của X là

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$\ldots$	$P(X=x_m)$

và bảng phân phối xác suất của Y là

Y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n
$P(Y=y_j)$	$P(Y=y_1)$	$P(Y=y_2)$	$\ldots$	$P(Y=y_n)$

trong đó, $P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{n} p_{X,Y}(x_i,y_j),\ i=1,\ldots,m$ và $P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{m} p_{X,Y}(x_i,y_j),\ j=1,\ldots,n.$

Bảng phân phối xác suất biên

✍ Từ các hàm xác suất biên hay bảng phân phối xác suất biên, ta có thể dễ dàng xác định các tham số đặc trưng của các biến ngẫu nhiên thành phần X và Y.

Ví dụ 10

Trong Ví dụ 4,

- Bảng phân phối xác suất biên của X là

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$7/44$	$21/44$	$7/22$	$1/22$

- Bảng phân phối xác suất biên của Y là

Y	0	1	2	3
$P(Y = y_j)$	$14/55$	$28/55$	$12/55$	$1/55$

Bảng phân phối xác suất biên

Ví dụ 10 (tiếp theo)

- Kỳ vọng của X là

$$E(X) = (0)(7/44) + (1)(21/44) + (2)(7/22) + (3)(1/22) = 1,25.$$

- Phương sai của X là

$$V(X) = (0)^2(7/44) + (1)^2(21/44) + (2)^2(7/22) + (3)^2(1/22) - (1,25)^2 \approx 0,59659.$$

Hàm phân phối xác suất biên

Từ định nghĩa hàm phân phối,

$$F_X(x) = P(X < x) = P(X < x, Y < \infty) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(x, \infty).$$

Từ đó, hàm phân phối xác suất biên của X và Y là

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty) \quad \text{và} \quad F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y). \tag{13}$$

Hàm mật độ xác suất biên

✍ Từ Tính chất 2(c) ta có thể viết

$$F_X(x) = P(X < x) = P(X < x, Y < \infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,y)dy \Big) du.$$

Từ đây suy ra $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$. Tương tự ta cũng có $f_Y(y)$.

Định lý 8

Nếu X và Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{X,Y}(x,y)$ thì hàm mật độ xác suất của các biến ngẫu nhiên thành phần X và Y được xác định bởi

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \quad \text{và} \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx. \tag{14}$$

Hàm mật độ xác suất biên

Ví dụ 11

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X, Y) có hàm mật độ xác suất là

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx, & \text{nếu } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

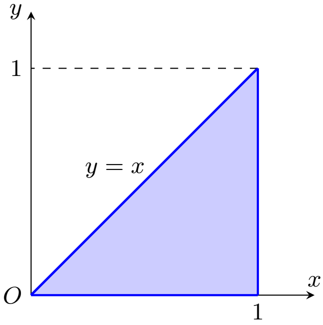
(a) Tìm hằng số k.

(b) Tìm các hàm mật độ xác suất biên $f_X(x)$ và $f_Y(y)$.

(c) Tính kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên X.

Hàm mật độ xác suất biên

Giải. Ký hiệu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1;\ 0 < y < x\}$ (xem Hình 2).



Hình 2: Miền D của Ví dụ 11

Hàm mật độ xác suất biên

(a) Theo Tính chất 2(a), $k \geq 0$ và theo Tính chất 2(b),

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint_D kxdxdy = \int_0^1 dx \int_0^x kxdy = k\int_0^1 x^2 dx = \frac{k}{3}.$$

Suy ra $k = 3$ và hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3x, & \text{nếu } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$

(b) Tìm các hàm mật độ biên từ (14),

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x 3xdy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{trái lại,} \end{cases} = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{trái lại,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_y^1 3xdx, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{trái lại,} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}y^2, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Hàm mật độ xác suất biên

(c) Kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên X được xác định như sau

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = \frac{3}{4},$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_0^1 x^2 \times 3x^2 dx - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}.$$

Phân phối xác suất có điều kiện

✍ Trong mục này, ta xét phân phối xác suất có điều kiện với điều kiện là một biến ngẫu nhiên. Nội dung bao gồm:

- Bảng phân phối xác suất có điều kiện
- Hàm mật độ xác suất có điều kiện

Từ đó, xây dựng các công thức tính kỳ vọng có điều kiện của biến ngẫu nhiên.

Bảng phân phối xác suất có điều kiện

Định nghĩa 5

Cho hai biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y và y là một số thực sao cho $p_Y(y) > 0$. Hàm xác suất có điều kiện của X với điều kiện $Y = y$ được ký hiệu và xác định bởi

$$p_{X|Y=y}(x) = p_{X|y}(x) = P(X = x|Y = y). \tag{15}$$

✍ Từ định nghĩa xác suất có điều kiện ta có

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}. \tag{16}$$

Định lý 9

Cho X và Y có hàm xác suất đồng thời $p_{X,Y}(x,y)$, x và y là các số thực sao cho $p_X(x) > 0$ và $p_Y(y) > 0$. Khi đó,

$$p_{X,Y}(x,y) = p_{X|Y=y}(x)p_Y(y) = p_{Y|X=x}(y)p_X(x). \tag{17}$$

Bảng phân phối xác suất có điều kiện

Từ Định nghĩa 2 ta suy ra

- Bảng phân phối xác suất có điều kiện của X với điều kiện $Y = y_j$

$X \mid Y = y_j$	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
P	$P(X = x_1 \mid Y = y_j)$	$P(X = x_2 \mid Y = y_j)$	$\ldots$	$P(X = x_m \mid Y = y_j)$

- Bảng phân phối xác suất có điều kiện của Y với điều kiện $X = x_i$

$Y \mid X = x_i$	y_1	y_2	$\ldots$	y_n
P	$P(Y = y_1 \mid X = x_i)$	$P(Y = y_2 \mid X = x_i)$	$\ldots$	$P(Y = y_n \mid X = x_i)$

Bảng phân phối xác suất có điều kiện

Ví dụ 12

Từ kết quả phân tích các số liệu thống kê trong tháng về doanh số bán hàng (X) và chi phí cho quảng cáo (Y) (đơn vị triệu đồng) của một công ty, thu được bảng phân phối xác suất đồng thời như sau:

$Y \backslash X$	100	200	300
1	0, 15	0, 1	0, 14
1, 5	0, 05	0, 2	0, 15
2	0, 01	0, 05	0, 15

Bảng phân phối xác suất có điều kiện của X với điều kiện $Y = 1,5$ và của Y với điều kiện $X = 300$ lần lượt là

$X\|Y = 1,5$	100	200	300
P	0,125	0,5	0,375

$Y\|X = 300$	1	1,5	2
P	$\frac{14}{44}$	$\frac{15}{44}$	$\frac{15}{44}$

Hàm mật độ xác suất có điều kiện

Định nghĩa 6

Cho hai biến ngẫu nhiên liên tục X và Y có hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{X,Y}(x, y)$. Hàm mật độ xác suất có điều kiện của X với điều kiện $Y = y$ được ký hiệu và xác định bởi

$$f_{X|Y=y}(x) = f_{X|y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad \text{với} \quad f_Y(y) > 0. \tag{18}$$

Tương tự, hàm mật độ xác suất có điều kiện của Y với điều kiện $X = x$ là

$$f_{Y|X=x}(y) = f_{Y|x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} \quad \text{với} \quad f_X(x) > 0. \tag{19}$$

Hàm mật độ xác suất có điều kiện

✍ Các hàm mật độ có điều kiện cũng thỏa mãn các tính chất của một hàm mật độ thông thường, chẳng hạn,

- $f_{Y|x}(y) \geq 0$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|x}(y)dy = 1$.
- $P(Y \in B|X = x) = \displaystyle\int_B f_{Y|x}(y)dy$ với mọi $B \subset S_Y$.

✍ Từ (18) và (19) ta có thể xác định được hàm mật độ đồng thời $f_{X,Y}(x, y)$ bởi

$$f_{X,Y}(x, y) = f_Y(y)f_{X|y}(x) = f_X(x)f_{Y|x}(y). \tag{20}$$

Hàm mật độ xác suất có điều kiện

Ví dụ 13

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm mật độ xác suất là

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{nếu } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm các hàm mật độ xác suất biên $f_X(x)$ và $f_Y(y)$.

(b) Tìm các hàm mật độ xác suất có điều kiện $f_{X|y}(x)$ và $f_{Y|x}(y)$.

Hàm mật độ xác suất có điều kiện

Giải.

(a) Các hàm mật độ xác suất biên là:

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \int\limits_0^x \frac{1}{x}dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{trái lại,} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \int\limits_y^1 \frac{1}{x}dx, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{trái lại,} \end{cases} = \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Hàm mật độ xác suất có điều kiện

(b) Các hàm mật độ xác suất có điều kiện là:

$$f_{X|y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x \ln y}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

$$f_{Y|x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Kỳ vọng có điều kiện

Định lý 10

Cho $W = g(X, Y)$ là một hàm của hai biến ngẫu nhiên X và Y. Khi đó, kỳ vọng có điều kiện của $W = g(X, Y)$ với điều kiện $Y = y$ là

$$E(W|y) = E[g(X, Y)|Y = y] = \sum_{x \in S_X} g(x, y) p_{X|Y=y}(x) \tag{21}$$

nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc và

$$E(W|y) = E[g(X, Y)|Y = y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_{X|y}(x) dx \tag{22}$$

nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục.

Kỳ vọng có điều kiện

✍ Kỳ vọng có điều kiện của X với điều kiện $Y = y$ là một trường hợp đặc biệt của Định lý 10:

$$E(X|Y=y) = \sum_{x \in S_X} x P_{X|y}(x) \quad \text{nếu } X \text{ rời rạc} \tag{23}$$

và

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|y}(x) dx \quad \text{nếu } X \text{ liên tục.} \tag{24}$$

Kỳ vọng có điều kiện

Ví dụ 14

Với số liệu của Ví dụ 12,

(a) Nếu chi phí cho quảng cáo 1,5 triệu đồng thì doanh số trung bình là bao nhiêu?

(b) Nếu muốn doanh số là 300 triệu đồng thì trung bình phải chi phí cho quảng cáo bao nhiêu?

Giải. Sử dụng kết quả của Ví dụ 12

(a) Nếu chỉ chi phí cho quảng cáo là 1,5 triệu đồng thì doanh số trung bình là

$$E(X|Y=1,5) = 100 \times 0,125 + 200 \times 0,5 + 300 \times 0,375 = 225 \quad \text{(triệu đồng)}.$$

(b) Nếu muốn doanh số là 300 triệu đồng thì trung bình phải chi phí cho quảng cáo là

$$E(Y|X=300) = 1 \times \frac{14}{44} + 1,5 \times \frac{15}{44} + 2 \times \frac{15}{44} \simeq 1,5136 \quad \text{(triệu đồng)}.$$

Kỳ vọng có điều kiện

Định nghĩa 7

Kỳ vọng có điều kiện của X với điều kiện Y, $E(X|Y)$, là một hàm của biến ngẫu nhiên Y sao cho nếu $Y = y$ thì $E(X|Y) = E(X|Y = y)$.

Ví dụ 15

Giả sử hàm mật độ xác suất có điều kiện của biến ngẫu nhiên X với điều kiện $Y = y$ có dạng

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-y}, & y < x < 1, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

Tìm kỳ vọng có điều kiện $E(X|Y = y)$ và $E(X|Y)$.

Kỳ vọng có điều kiện

Giải. Ta có

$$E(X|Y=y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|y}(x)dx=\int\limits_{y}^{1}\frac{1}{1-y}xdx=\frac{x^2}{2(1-y)}\Big|_{x=y}^{x=1}=\frac{1+y}{2}.$$

Từ $E(X|Y=y)=\frac{1+y}{2}$ suy ra

$$E(X|Y)=\frac{1+Y}{2}.$$

3.2. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Biến ngẫu nhiên độc lập

- Trong một số phép thử ngẫu nhiên, thông tin về các giá trị của X không thay đổi bất kỳ xác suất nào liên quan đến các giá trị của Y. Trong trường hợp đó ta nói X và Y độc lập với nhau.
- Một số dấu hiệu nhận biết tính độc lập của hai biến ngẫu nhiên X và Y dựa trên tính chất của hàm xác suất/bảng phân phối xác suất đồng thời, hàm phân phối xác suất đồng thời, hàm mật độ xác suất đồng thời như trong Định nghĩa 8 dưới đây.

Biến ngẫu nhiên độc lập

Định nghĩa 8

Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là độc lập với nhau nếu với mọi x, y,

(a) $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$, nếu X và Y rời rạc;

(b) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, nếu X và Y liên tục;

(c) $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$.

Biến ngẫu nhiên độc lập

Ví dụ 16

Hai biến ngẫu nhiên X và Y trong Ví dụ 11 có độc lập không?

Giải. Từ kết quả của Ví dụ 11, $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, nên X và Y không độc lập.

Ví dụ 17

Sử dụng biến ngẫu nhiên hai chiều, tính xác suất để hai người gặp được nhau trong (Ví dụ ở Chương 1)

(2)

[2] Hai người bạn hẹn gặp nhau ở công viên trong khoảng thời gian từ 17h00 đến 18h00. Họ quy ước nếu người nào đến trước thì sẽ đợi người kia trong vòng 10 phút, sau 10 phút đợi nếu không gặp sẽ về. Thời điểm đến của hai người là ngẫu nhiên và độc lập với nhau trong khoảng thời gian trên. Tính xác suất hai người gặp được nhau.

Biến ngẫu nhiên độc lập

Giải. Quy gốc thời gian về lúc $17\text{h}00$. Gọi X và Y lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ thời điểm đến của hai người trong khoảng thời gian từ phút thứ 0 đến phút thứ 60. X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có phân phối đều trên $[0; 60]$. Do X và Y độc lập nên chúng có hàm mật độ xác suất đồng thời

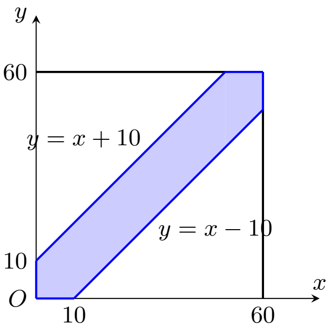
$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3600}, & (x, y) \in [0, 60]^2, \\ 0, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Đặt $W = |X - Y|$. Khi đó, xác suất hai người gặp được nhau là

$$P(W < 10) = P(|X - Y| < 10) = P((X, Y) \in D),$$

trong đó D là giao của miền $|x - y| < 10$ và hình vuông $[0; 60]^2$ (xem Hình 3).

Biến ngẫu nhiên độc lập



Hình 3: Miền D của Ví dụ 17

Suy ra

$$P(W < 10) = 1 - 2\int\limits_{10}^{60} dx \int\limits_{0}^{x-10} \frac{1}{3600} dy = 1 - \frac{2500}{3600} = \frac{11}{36}.$$

Biến ngẫu nhiên độc lập

Định lý 11

Với hai biến ngẫu nhiên X và Y, nếu một trong các tính chất sau là đúng thì các tính chất còn lại cũng đúng và X và Y độc lập với nhau.

1. Nếu X và Y rời rạc

(a) $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ với mọi x và y.

(b) $p_{X|Y=y}(x) = p_X(x)$ với mọi x và y với $p_Y(y) > 0$.

(c) $p_{Y|X=x}(y) = p_Y(y)$ với mọi x và y với $p_X(x) > 0$.

(d) $P(X \subset A, Y \subset B) = P(X \subset A)P(Y \subset B)$ với mọi $A \subset S_X$ và $B \subset S_Y$.

2. Nếu X và Y liên tục

(a) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ với mọi x và y.

(b) $f_{X|Y=y}(x) = f_X(x)$ với mọi x và y với $f_Y(y) > 0$.

(c) $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$ với mọi x và y với $f_X(x) > 0$.

(d) $P(X \subset A, Y \subset B) = P(X \subset A)P(Y \subset B)$ với mọi $A \subset S_X$ và $B \subset S_Y$.

Biến ngẫu nhiên độc lập

Ví dụ 18

Gọi biến ngẫu nhiên X và Y lần lượt là chiều dài và chiều rộng của một chi tiết máy được gia công. Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập và giả sử X tuân theo luật phân phối chuẩn với trung bình 10,5 milimét và phương sai 0,0025 (milimét)^2, Y tuân theo luật phân phối chuẩn với trung bình 3,2 milimét và phương sai 0,0036 (milimét)^2. Tính xác suất để $10,4 < X < 10,6$ và $3,15 < Y < 3,25$.

Giải. Vì X và Y độc lập nên

$$
\begin{aligned}
&P(10,4 < X < 10,6, 3,15 < Y < 3,25) = P(10,4 < X < 10,6)P(3,15 < Y < 3,25)\\
&= \left[\Phi\left(\frac{10,6-10,5}{\sqrt{0,0025}}\right) - \Phi\left(\frac{10,4-10,5}{\sqrt{0,0025}}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{3,25-3,2}{\sqrt{0,0036}}\right) - \Phi\left(\frac{3,15-3,2}{\sqrt{0,0036}}\right)\right]\\
&= \Big(\Phi(2)-\Phi(-2)\Big)\Big(\Phi(0,83)-\Phi(-0,83)\Big) = (2\times 0,97725-1)(2\times 0,79673-1)\\
&\approx 0,5665
\end{aligned}
$$

Biến ngẫu nhiên độc lập

Tính chất 3

Với hai biến ngẫu nhiên độc lập X và Y ta có

(a) $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$.

(b) $E(XY) = E(X)E(Y)$.

(c) $E(X|y) = E(X)$ với mọi $y \in S_Y$.

(d) $E(Y|x) = E(Y)$ với mọi $x \in S_X$.

3.2. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Bài tập

Bài 1

Tính chất nào sau đây của hàm xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên (X, Y) là SAI:

A. $p_{X,Y}(x,y) \geq 0$

B. $p_{X,Y}(x,y) \leq 1$

C. $\sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} p_{X,Y}(x,y) = \infty$

D. $p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$

Bài 2

Tính chất nào sau đây của hàm phân phối xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) là SAI:

A. $F_{X,Y}(x,y) \geq 0$

B. $F_{X,Y}(x,y) \leq 1$

C. $F_{X,Y}(x,0) = 0$

D. $F_{X,Y}(x,y) = P(X < x, Y < y)$

E. $F_{X,\infty}(x,y) = F_X(x)$

F. $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

Bài tập

Bài 3

Công thức nào tính $P(a \leq X < b, c \leq Y < d)$ dựa vào hàm phân phối xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) là ĐÚNG:

A. $F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(b,c) - F_{X,Y}(a,d) + F_{X,Y}(a,c)$

B. $F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,d) + F_{X,Y}(a,c)$

C. $F_{X,Y}(b,d) + F_{X,Y}(b,c) - F_{X,Y}(a,d) + F_{X,Y}(a,c)$

D. $F_{X,Y}(b,d) + F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(a,c)$

C. $F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(b,c) - F_{X,Y}(a,c) + F_{X,Y}(a,d)$

D. $F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,c) - F_{X,Y}(a,d) + F_{X,Y}(b,c)$

Bài tập

Bài 4

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm xác suất đồng thời xác định như sau:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx, & x = 1,2; y = 1,2,3, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Miền giá trị $S_{X,Y}$ của (X, Y) và hằng số c là:

A. $S_{X,Y} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$ và $c = 1/9$

B. $S_{X,Y} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$ và $c = 2/9$

C. $S_{X,Y} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$ và $c = 1/12$

D. $S_{X,Y} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ và $c = 1/6$

Bài tập

Bài 5

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có bảng phân phối xác suất đồng thời xác định như sau:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$3/36$	$6/36$	$1/36$
2	$12/36$	$8/36$	0
3	$6/36$	0	0

Xác suất $P(X \leq 1,5, Y \geq 0,5)$ là:

A. $9/36$
B. $22/36$
C. $10/36$
D. $7/36$
E. $15/36$
F. $12/36$

Bài tập

Bài 6

Trong 3 lần tung một đồng xu cân đối đồng chất, gọi X biến ngẫu nhiên chỉ số lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa, Y là biến ngẫu nhiên nhận giá trị 0 nếu không lần nào đồng xu xuất hiện mặt ngửa, còn lại nhận giá trị 1. Khi đó $p_{X,Y}(2;1)$ bằng:

A. $3/8$

B. $4/8$

C. $2/8$

D. $5/8$

E. $1/8$

F. $6/8$

Bài 7

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có bảng phân phối xác suất đồng thời là:

Y \ X	1	2	3
1	1/9	1/9	1/9
2	2/9	2/9	2/9

Bảng phân phối xác suất biên của X là:

A.

X	1	2	3
P	1/9	1/9	1/9

B.

X	1	2	3
P	2/9	2/9	2/9

C.

X	1	2
P	1/3	2/3

D.

X	1	2	3
P	1/3	1/3	1/3

E.

X	1	2
P	1/3	1/3

F.

X	1	2
P	2/3	1/3

Bài tập

Bài 8

Một đồng xu không đồng chất với xác suất xuất hiện mặt ngửa là 0,4. Người ta tiến hành tung đồng xu này hai lần. Gọi X là số lần mặt ngửa xuất hiện trong lần tung đầu tiên, Y là số lần xuất hiện mặt ngửa trong cả hai lần tung đồng xu. Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) là:

A.

X \ Y	0	1	2
0	0,36	0,24	0
1	0,12	0,12	0,16

C.

X \ Y	0	1	2
0	0,3	0,24	0
1	0	0,3	0,16

B.

X \ Y	0	1	2
0	0,2	0,24	0
1	0,16	0,24	0,16

D.

X \ Y	0	1	2
0	0,36	0,24	0
1	0	0,24	0,16

Bài tập

Bài 9

Từ một lọ kẹo có 4 kẹo vị cam, 2 kẹo vị táo và 3 kẹo vị ổi, lấy ngẫu nhiên 2 chiếc kẹo. Gọi X là số kẹo vị cam và Y là là số kẹo vị táo trong 2 chiếc được lấy ra. Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) là:

A.

Y \ X	0	1	2
0	$3/36$	$6/36$	$1/36$
1	$12/36$	$8/36$	0
2	$6/36$	0	0

B.

X \ Y	0	1	2
0	$3/36$	$6/36$	$1/36$
1	$8/36$	$12/36$	0
2	$6/36$	0	0

C.

X \ Y	0	1	2
0	$3/36$	$6/36$	$1/36$
1	$12/36$	$8/36$	0
2	$6/36$	0	0

D.

X \ Y	0	1	2
0	$9/36$	$3/36$	$1/36$
1	$12/36$	$8/36$	0
2	$6/36$	0	0

Bài tập

Bài 10

Cho biến ngẫu nhiên X và Y có bảng phân phối xác suất đồng thời như sau:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,12	k	0,03
2	0,28	0,35	0,07

(a) Tìm tham số k.

(b) Tìm hàm xác suất biên của X và Y.

Bài tập

Bài 11

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm xác suất đồng thời là:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/9x, & x = 1, 2; y = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Tìm hàm xác suất của $Z = X + Y$.

Bài tập

Bài 12

Một siêu thị có hai quầy thanh toán, tỷ lệ thời gian bận phục vụ của quầy thứ nhất và thứ hai lần lượt là X và Y. Biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời là:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Tìm $P(X \leq 1/3, Y \geq 1/2)$.

Bài 13

Một xạ thủ bắn vào bia tròn có bán kính 5 và tâm $(0,0)$. Giả sử rằng hai biến ngẫu nhiên X và Y có phân phối đều. Hàm mật độ xác suất đồng thời của (X, Y) là:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{25\pi}, & 0 \leq x^2 + y^2 \leq 25, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Tìm xác suất $P(4 \leq X^2 + Y^2 < 9)$.

Bài tập

Bài 14

Giả sử thời gian hoạt động (năm) của chi tiết máy thứ nhất và thứ hai là biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3e^{-3x-y}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ xác suất của thời gian hoạt động cho từng chi tiết máy.

Bài 15

Từ một kho hàng được ba hãng cung cấp gồm 3 thiết bị của hãng A, 5 thiết bị của hãng B, 4 thiết bị của hãng C, lấy ngẫu nhiên ra 3 thiết bị. Gọi X và Y lần lượt là số thiết bị của hãng B và hãng C trong 3 thiết bị được lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất đồng thời cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y).

Bài tập

Bài 16

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên độc lập, có phân phối Poisson với tham số $\lambda_X = 1$ và $\lambda_Y = 2$. Tính xác suất của các sự kiện sau:

(a) Số nhỏ nhất trong các số X, Y không nhỏ hơn 1.

(b) Số nhỏ nhất trong các số X, Y bằng 1.

Bài 17

Giả sử rằng thời gian hoạt động theo đơn vị năm của hai chi tiết máy thứ nhất và thứ hai là biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3e^{-3x-y}, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Tìm xác suất để chi tiết máy thứ nhất hoạt động ít hơn 2 năm và thời gian hoạt động chi tiết thứ hai ít hơn 1 năm.

Bài tập

Bài 18

Giả sử rằng thời gian hoạt động theo đơn vị năm của hai chi tiết máy thứ nhất và thứ hai là biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3e^{-3x-y}, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Tìm hàm phân phối xác suất đồng thời $F_{X,Y}(x,y)$ cho thời gian hoạt động của hai chi tiết máy.

Bài 19

Một mạch điện gồm hai thiết bị mắc song song. Thời gian hoạt động của hai thiết bị là biến ngẫu nhiên X, Y độc lập có phân phối mũ với tham số $\lambda_X = \lambda_Y = \lambda > 0$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ của $Z = X + Y$ là thời gian hoạt động của mạch điện.

Bài tập

Bài 20

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y). Tính chất nào của phân phối xác suất có điều kiện $F_{X|Y=y}(x)$ sau đây là SAI:

A. $F_{X,Y}(x, y) = F_{X|Y=y}(x)F_Y(y)$

B. $F_{X|Y=y}(x) \geq 0$

C. $F_{X|Y=y}(\infty) = 1$

D. $P(X < x|Y = y) = F_{X|Y=y}(x)$

Bài tập

Bài 21

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm phân phối xác suất đồng thời là $F_{X,Y}(x, y)$ và hai hàm phân phối xác suất biên là $F_X(x), F_Y(y)$. X và Y được gọi là độc lập nếu và chỉ nếu:

A. $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$

B. $F_{X,Y}(x, y) \neq F_X(x) + F_Y(y)$

C. $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) + F_Y(y)$

D. $F_{X,Y}(x, y) \neq F_X(x)F_Y(y)$

E. $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)/F_Y(y)$

F. $F_{X,Y}(x, y) \neq F_X(x)/F_Y(y)$

Bài 22

Một đồng xu không đồng chất với xác suất xuất hiện mặt ngửa là 0,4. Người ta tiến hành tung đồng xu này hai lần. Gọi X là số lần mặt ngửa xuất hiện trong lần tung đầu tiên, Y là số lần xuất hiện mặt ngửa trong cả hai lần tung đồng xu. Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) là:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,36	0,24	0
1	0	0,24	0,16

Khi đó,

A. $p_{X|Y=1}(x) = \begin{cases} 1/5, & x = 0, 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$

B. $p_{X|Y=1}(x) = \begin{cases} 1/4, & x = 0, 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$

C. $p_{X|Y=1}(x) = \begin{cases} 1/3, & x = 0, 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$

D. $p_{X|Y=1}(x) = \begin{cases} 1/2, & x = 0, 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$

Bài tập

Bài 23

Một siêu thị có hai quầy thanh toán, tỷ lệ thời gian bận phục vụ của quầy thứ nhất và thứ hai là X, Y. Biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời là:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (x+y), & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

$P(X < 1/2 | Y > 1/3)$ là:

A. $11/28$

B. $11/36$

C. $7/9$

D. $1/4$

Bài 24

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời là:

$$f(x,y) = \begin{cases} 6(1-y), & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Khi đó,

A. $f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} 6y - 6y^2, & 0 < x \leq y < 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$

B. $f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} y, & 0 < x \leq y < 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$

C. $f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6y-6y^2}, & 0 < x \leq y < 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$

D. $f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 0 < x \leq y < 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$

Bài tập

Bài 25

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có bảng phân phối xác suất đồng thời là:

Y \ X	0	1	2
1	2/9	1/9	0
2	1/9	2/9	3/9

$E(X|Y = 1)$ là:

A. $8/9$ **C.** 1 **E.** $2/3$

B. $1/9$ **D.** 0 **F.** $1/3$