Chương 1
SỰ KIỆN NGẪU NHIÊN VÀ PHÉP TÍNH XÁC SUẤT

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG[1]

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

[1] Văn phòng: 201.BIS-D3.5

1.4. CÔNG THỨC CỘNG VÀ NHÂN XÁC SUẤT

Công thức cộng xác suất

Định lý 1

(a) Nếu A và B là hai sự kiện bất kỳ, thì

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{11}$$

(b) Nếu A và B là hai sự kiện xung khắc, thì

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{12}$$

(c) Nếu A, B và C là ba sự kiện bất kỳ, thì

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \tag{13}$$

Công thức cộng xác suất

Định lý 1 (tiếp theo)

(d) Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n sự kiện bất kỳ ($n \geq 2$), thì

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n). \qquad (14)$$

(e) Nếu các sự kiện $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xung khắc từng đôi, thì

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (15)$$

Công thức cộng xác suất

Hệ quả 2

(a) Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một hệ đầy đủ các sự kiện thì $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

(b) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Công thức cộng xác suất

Ví dụ 25

Một lớp có 100 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên giỏi ngoại ngữ, 30 sinh viên giỏi toán, 20 sinh viên vừa giỏi ngoại ngữ, vừa giỏi toán. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Tìm xác suất để sinh viên đó giỏi ít nhất một trong hai môn trên.

Giải. Gọi N là sự kiện "sinh viên đó giỏi ngoại ngữ"; T là sự kiện "sinh viên đó giỏi toán xác suất". Sử dụng công thức cộng (11), xác suất để sinh viên đó giỏi ít nhất một trong hai môn toán và ngoại ngữ là

$$P(T+N) = P(T) + P(N) - P(TN) = \frac{30}{100} + \frac{40}{100} - \frac{20}{100} = \frac{50}{100} = 0,5.$$

1.4. CÔNG THỨC CỘNG VÀ NHÂN XÁC SUẤT

Xác suất có điều kiện

SAMI 1956

Định nghĩa 18

Giả sử trong một phép thử có sự kiện B với $P(B) > 0$. Khi đó, xác suất có điều kiện của sự kiện A nào đó, biết rằng sự kiện B đã xảy ra được ký hiệu và định nghĩa là

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{16}$$

Tương tự,

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) > 0. \tag{17}$$

✍

- Xác suất có điều kiện có mọi tính chất của một xác suất bình thường, chẳng hạn $P(A|B) \geq 0$, $P(B|B) = 1$.
- Ta có thể tính xác suất điều kiện bằng cách áp dụng các công thức (16) hoặc (17) hoặc tính trực tiếp.

Xác suất có điều kiện

Ví dụ 26

Từ một bộ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài đã được trộn kỹ rút ngẫu nhiên ra một quân bài. Biết rằng quân bài được rút ra là quân màu đen, tính xác suất đó là quân J.

Giải. Gọi A là sự kiện "rút được quân J" và B là sự kiện "rút được quân màu đen".

- Cách 1: Xác suất cần tìm là

$$P(A|B) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}.$$

- Cách 2: Sử dụng công thức (16),

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2/52}{26/52} = \frac{1}{13}.$$

1.4. CÔNG THỨC CỘNG VÀ NHÂN XÁC SUẤT

Sự kiện độc lập

Định nghĩa 19

(a) Hai sự kiện A và B được gọi là độc lập với nhau nếu sự kiện này xuất hiện hay không không làm ảnh hướng tới khả năng xuất hiện của sự kiện kia, nghĩa là

$$P(A|B) = P(A|\overline{B}) = P(A), \quad P(B|A) = P(B|\overline{A}) = P(B).$$

(b) Các sự kiện $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập từng đôi với nhau nếu mỗi cặp hai trong n sự kiện đó độc lập với nhau.

(c) Các sự kiện $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập tổng thể nếu mỗi sự kiện trong chúng độc lập với tích của một số s bất kỳ sự kiện trong các sự kiện còn lại, $1 \leq s \leq n-1$.

✍

- Nếu A và B độc lập thì các cặp A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.
- Thông thường tính độc lập của các sự kiện được suy ra từ ý nghĩa thực tế.

Sự kiện độc lập

Ví dụ 27

Tung hai con xúc xắc cân đối đồng chất, gọi A là sự kiện "con thứ nhất xuất hiện mặt 2 chấm", B là sự kiện "con thứ hai xuất hiện mặt chấm chẵn", thì A và B là độc lập.

Công thức nhân xác suất

Định lý 2

(a) Nếu A và B là hai sự kiện bất kỳ, thì

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). \tag{18}$$

(b) Nếu A và B là hai sự kiện độc lập, thì

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{19}$$

(c) Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n sự kiện bất kỳ $(n \geq 2)$, thì

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}). \tag{20}$$

(d) Nếu các sự kiện $A_1, A_2, \ldots, A_n$ độc lập trong tổng thể, thì

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{21}$$

✍ Công thức nhân (19) cung cấp cho ta một phương pháp khác để kiểm tra tính độc lập của hai sự kiện ngẫu nhiên.

Công thức nhân xác suất

Ví dụ 28

Gieo đồng thời hai đồng xu cân đối đồng chất lên mặt phẳng cứng. Gọi A_1 là sự kiện "ít nhất một đồng xu xuất hiện mặt sấp", A_2 là sự kiện "ít nhất một đồng xu xuất hiện mặt ngửa", A_3 là sự kiện "có ba đồng xu xuất hiện mặt ngửa". A_1, A_2, A_3 có độc lập tổng thể không?

Giải. Mặc dù

$$P(A_1A_2A_3) = 0 = P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

nhưng $P(A_1A_2) = \frac{1}{2}$, trong khi $P(A_1)P(A_2) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$. Do đó, A_1, A_2, A_3 không độc lập tổng thể.

Công thức nhân xác suất

Ví dụ 29

Một tổ có 15 sinh viên trong đó có 5 sinh viên học giỏi môn Xác suất thống kê. Chia tổ này thành 5 nhóm, mỗi nhóm 3 người. Tính xác suất để nhóm nào cũng có một sinh viên học giỏi môn Xác suất thống kê.

Giải. Gọi A là sự kiện "nhóm nào cũng có một sinh viên học giỏi môn Xác suất thống kê"; A_i là sự kiện "nhóm i có một sinh viên học giỏi môn Xác suất thống kê", $i = 1, \ldots, 5$. Khi đó, $A = A_1A_2A_3A_4A_5$. Sử dụng công thức nhân (20), $P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)P(A_5|A_1A_2A_3A_4)$, trong đó,

$$P(A_1) = \frac{C_5^1 \times C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}; \quad P(A_2|A_1) = \frac{C_4^1 \times C_8^2}{C_{12}^3} = \frac{28}{55}; \quad P(A_3|A_1A_2) = \frac{C_3^1 \times C_6^2}{C_9^3} = \frac{15}{28};$$

$$P(A_4|A_1A_2A_3) = \frac{C_2^1 \times C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{5}; \quad P(A_5|A_1A_2A_3A_4) = \frac{C_1^1 \times C_2^2}{C_3^3} = 1.$$

Vậy $P(A) = \dfrac{81}{1001} \approx 0,0809.$

Công thức nhân xác suất

Ví dụ 30

Ba xạ thủ cùng bắn súng vào một bia độc lập nhau. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ thứ nhất, thứ hai, thứ ba tương ứng là 0,7, 0,8 và 0,9. Tính xác suất để:

(a) Có duy nhất một xạ thủ bắn trúng bia;

(b) Có đúng hai xạ thủ bắn trúng bia;

(c) Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia;

(d) Xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia biết rằng có hai xạ thủ bắn trúng bia.

Công thức nhân xác suất

Giải. Gọi A_i là sự kiện "xạ thủ thứ i bắn trúng bia", $i = 1, 2, 3$.

(a) Gọi A là sự kiện "có duy nhất một xạ thủ bắn trúng bia". Khi đó,

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3.$$

Sử dụng công thức cộng (15) và công thức nhân (21) trong trường hợp các sự kiện xung khắc và độc lập suy ra

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) \\ &= 0,7 \times 0,2 \times 0,1 + 0,3 \times 0,8 \times 0,1 + 0,3 \times 0,2 \times 0,9 = 0,092. \end{aligned}$$

(b) Gọi B là sự kiện "có đúng hai xạ thủ bắn trúng bia". Khi đó,

$$B = A_1 A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3.$$

Làm tương tự ý (a), $P(B) = 0,398$.

Công thức nhân xác suất

(c) Gọi C là sự kiện "có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia".

- Cách 1: $C = A_1 + A_2 + A_3$,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) \\ &= 0,994; \end{aligned}$$

- Cách 2: $\overline{C} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0,006, \quad P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0,006 = 0,994;$$

- Cách 3: $C = A + B + A_1A_2A_3$, $P(C) = P(A) + P(B) + P(A_1A_2A_3) = 0,994$.

(d) $P(A_1|B) = \dfrac{P(A_1B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3)}{P(B)} = \dfrac{0,182}{0,398} \approx 0,46.$

1.4. CÔNG THỨC CỘNG VÀ NHÂN XÁC SUẤT

Dãy phép thử Bernoulli

Định nghĩa 20

Dãy n phép thử $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ được gọi là độc lập với nhau nếu mỗi sự kiện trong từng phép thử độc lập với mọi sự kiện tương ứng của các phép thử khác.

Định nghĩa 21

Dãy n phép thử $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ được gọi là dãy phép thử Bernoulli nếu thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1. Dãy này độc lập;
2. Trong mỗi phép thử $\mathcal{C}_j$ ta quan tâm đến hai sự kiện A và $\overline{A}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
3. Xác suất của sự kiện A, $P(A)$, không thay đổi trong mọi phép thử và ký hiệu là $P(A) = p$.

Công thức Bernoulli

Định lý 3

Trong dãy n phép thử Bernoulli:

(a) Xác suất để sự kiện A xuất hiện đúng k lần, ký hiệu là $P_n(k)$, được xác định bởi

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{22}$$

(b) Xác suất để sự kiện A xuất hiện từ k_1 đến k_2 lần, ký hiệu là $P_n(k_1, k_2)$, được xác định bởi

$$P_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \le k_1 < k_2 \le n. \tag{23}$$

✍ Trong dãy phép thử Bernoulli, việc sử dụng công thức (22) hay (23) sẽ đơn giản hơn rất nhiều so với việc dùng các công thức nhân xác suất và cộng xác suất. Do đó, chúng có ý nghĩa thực tiễn rất lớn.

Công thức Bernoulli

Ví dụ 31

Trong một phân xưởng có 5 máy hoạt động độc lập. Giả sử trong mỗi ca làm việc, xác suất để mỗi máy bị hỏng là 0,1.

(a) Tìm xác suất để trong một ca đó có đúng 2 máy hỏng.

(b) Biết rằng trong một ca có đúng 2 máy hỏng, tính xác suất để máy thứ nhất không hỏng.

Giải.

(a) Coi sự hoạt động của mỗi máy là một phép thử. Ta có 5 phép thử độc lập; trong mỗi phép thử chỉ có 2 trường hợp: hoặc máy hỏng, hoặc máy không hỏng; xác suất hỏng của mỗi máy đều bằng 0,1. Ta có dãy phép thử Bernoulli với $n = 5$, $p = 0,1$. Áp dụng công thức Bernoulli (22) với $k = 2$, xác suất cần tìm là

$$P_5(2) = C_5^2 \times (0,1)^2 \times (0,9)^3 = 0,0729.$$

Công thức Bernoulli

✍ Nếu sử dụng công thức cộng và nhân xác suất với A là sự kiện "trong ca đó có đúng 2 máy hỏng", A_i là sự kiện "máy i bị hỏng trong ca", $i = 1, 2, \ldots, 5$, ta sẽ tính xác suất của A trên cơ sở phân tích:

$$\begin{aligned} A = {} & A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5 + A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5 + \\ & + \overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5 + \\ & + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4\overline{A}_5 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4A_5 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4A_5 \end{aligned}$$

và sử dụng tính xung khắc, tính độc lập của các sự kiện. Rõ ràng việc sử dụng công thức (22) cho ví dụ này đơn giản hơn rất nhiều.

(b) $P(\overline{A}_1|A) = \dfrac{P(\overline{A}_1)P(A|\overline{A}_1)}{P(A)} = \dfrac{0,9 \times C_4^2 \times (0,1)^2 \times (0,9)^2}{0,0729} = \dfrac{0,04374}{0,0729} = 0,6.$

1.4. CÔNG THỨC CỘNG VÀ NHÂN XÁC SUẤT

Bài tập

Bài 16

Trong một phép thử cho hai sự kiện A và B thỏa mãn $P(A) = 0,5$; $P(\overline{B}) = 0,4$ và $P(\overline{A}B) = 0,4$. Khi đó, $P(B|A)$ bằng:

A 0,4

B 0,36

C 0,48

D 0,32

Bài 17

Trong một phép thử cho hai sự kiện A và B thỏa mãn $P(A) = P(B) = 1/2$ và $P(A\overline{B}) = 1/8$. Hãy tính:

(a) $P(AB)$.

(b) $P(\overline{A}B)$.

(c) $P(\overline{A} + \overline{B})$.

Bài tập

Bài 18

Trong cùng một phép thử cho A và B là các sự kiện thỏa mãn $P(A) = 1/4$ và $P(B) = 1/2$. Tính xác suất để A không xảy ra nhưng B xảy ra trong các trường hợp sau và vẽ sơ đồ Venn tương ứng:

(a) A và B xung khắc.

(b) A suy ra B.

(c) $P(AB) = 1/8$.

Bài 19

Trên một bảng quảng cáo, người ta mắc hai hệ thống bóng đèn độc lập. Hệ thống I gồm bốn bóng mắc nối tiếp, hệ thống II gồm ba bóng mắc song song. Khả năng bị hỏng của mỗi bóng trong 18 giờ thắp sáng liên tục là 0,1. Việc hỏng của mỗi bóng của mỗi hệ thống được xem như độc lập. Tính xác suất để trong 18 giờ thắp sáng liên tục:

(a) Cả hai hệ thống đều bị hỏng.

(b) Chỉ có một hệ thống bị hỏng.

Bài tập

Bài 20

Một cửa hàng sách ước lượng rằng: trong tổng số các khách hàng đến cửa hàng có 30% khách cần hỏi nhân viên bán hàng, 20% khách mua sách và 15% khách thực hiện cả hai điều trên. Gặp ngẫu nhiên một khách trong nhà sách, tính xác suất để người này:

(a) Không thực hiện cả hai điều trên.

(b) Không mua sách, biết rằng người này đã hỏi nhân viên bán hàng.

Bài tập

Bài 21

Để thành lập đội tuyển quốc gia về một môn học, người ta tổ chức một cuộc thi tuyển gồm 3 vòng. Vòng thứ nhất lấy 80% thí sinh; vòng thứ hai lấy 70% thí sinh đã qua vòng thứ nhất và vòng thứ ba lấy 45% thí sinh đã qua vòng thứ hai. Để vào được đội tuyển, thí sinh phải vượt qua được cả 3 vòng thi. Tính xác suất để một thí sinh bất kỳ:

(a) Được vào đội tuyển.

(b) Bị loại ở vòng thứ ba.

(c) Bị loại ở vòng thứ hai, biết rằng thí sinh này bị loại.

Bài 22

Một nhân viên bán hàng mỗi ngày đi chào hàng ở 10 nơi với xác suất bán được hàng ở mỗi nơi là 0,2. Tìm xác suất để:

(a) Người đó bán được hàng ở 2 nơi.

(b) Người đó bán được hàng ở ít nhất một nơi.

Bài tập

Bài 23

Một bài thi trắc nghiệm gồm 12 câu hỏi, mỗi câu hỏi cho 5 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Giả sử một câu trả lời đúng được cộng 4 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 1 điểm. Một học sinh kém làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên phương án trả lời. Tìm xác suất để:

(a) Học sinh đó được 13 điểm.

(b) Học sinh đó bị điểm âm.

Bài 24

Hai vận động viên bóng bàn A và B đấu một trận gồm tối đa 5 ván (giả thiết không có kết quả hòa sau mỗi ván và trận đấu sẽ dừng nếu một người nào đó thắng trước 3 ván). Xác suất để A thắng được ở mỗi ván đều là 0,7.

(a) Tính các xác suất để A thắng sau x ván ($x = 3, 4, 5$).

(b) Tính xác suất để trận đấu kết thúc sau 5 ván.