Chương 2
BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG[1]

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

[1] Phòng BIS.201-D3.5

2.3. KỲ VỌNG, PHƯƠNG SAI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

1. **2.3.1 Kỳ vọng**
   - 2.3.1.1 Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên
   - 2.3.1.2 Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
   - 2.3.1.3 Tính chất của kỳ vọng
2. **2.3.2 Phương sai. Độ lệch chuẩn**
   - 2.3.2.1 Phương sai của biến ngẫu nhiên
   - 2.3.2.2 Phương sai của hàm của một biến ngẫu nhiên
   - 2.3.2.3 Tính chất của phương sai
   - 2.3.2.4 Độ lệch chuẩn
3. **2.3.3 Mốt. Trung vị**
   - 2.3.3.1 Mốt
   - 2.3.3.2 Trung vị
4. **Bài tập Mục 2.3**

Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 5

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là $E(X)$ (hoặc μ_X hoặc đơn giản là μ), được định nghĩa như sau:

(a) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc chỉ nhận hữu hạn các giá trị khác nhau với bảng phân phối xác suất (1) thì

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{8}$$

(b) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận một số đếm được các giá trị khác nhau với bảng phân phối xác suất (2) thì

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n \tag{9}$$

nếu chuỗi vế phải hội tụ.

Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 5 (tiếp theo)

(c) Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ thì

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \tag{10}$$

nếu tích phân vế phải hội tụ.

Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên

SAMI 1956

Ví dụ 18

(a) Trong Ví dụ 5, X là biến ngẫu nhiên chỉ số bít bị lỗi trong 4 bít được truyền đi, theo (8), kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X là

$$E(X) = (0 \times 0,6561) + (1 \times 0,2916) + (2 \times 0,0486) + (3 \times 0,0036) + (4 \times 0,0001) = 0,4.$$

(b) Trong Ví dụ 9, X là biến ngẫu nhiên chỉ số sản phẩm được sản xuất giữa hai lần điều chỉnh, theo (9), kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X là

$$E(X) = 0,001 \times \sum_{n=1}^{\infty} n \times (0,999)^{n-1} = 1000.$$

(c) Trong Ví dụ 14, X là biến ngẫu nhiên chỉ cường độ dòng điện đo được trên một sợi dây đồng mỏng, theo (10), kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X là

$$E(X) = \int_0^{20} x f_X(x)dx = \int_0^{20} 0,05x dx = 10.$$

Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên

✍

- Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên rời rạc có hữu hạn phần tử là một số xác định, còn với biến ngẫu nhiên rời rạc có vô hạn đếm được phần tử hay biến ngẫu nhiên liên tục thì chưa chắc đã có kỳ vọng.
- Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên rời rạc X là trung bình có trọng số của các giá trị có thể có của X, với trọng số bằng xác suất.

  Trong Ví dụ 18(a), mặc dù X không nhận giá trị là 0,4 nhưng trung bình có trọng số của các giá trị có thể có là 0,4.
- Khái niệm kỳ vọng được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực, ví dụ trong kinh doanh và quản lý, kỳ vọng được ứng dụng dưới dạng lợi nhuận kỳ vọng hay doanh số kỳ vọng.

Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên

Ví dụ 19

Xét trò chơi trả lời hai câu hỏi A và B, người chơi có quyền chọn câu hỏi nào để trả lời đầu tiên. Câu hỏi A được trả lời đúng với xác suất 0,8 và khi đó người chơi sẽ được thưởng 100 USD, câu hỏi B được trả lời đúng với xác suất 0,6 và người chơi được thưởng 200 USD. Nếu không trả lời đúng lần thứ nhất sẽ không được trả lời lần tiếp theo. Vậy người chơi nên chọn câu hỏi nào trả lời đầu tiên để tiền thưởng trung bình nhận được cao hơn.

Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên

Giải.

- Gọi X là "số tiền thưởng nhận được khi người chơi chọn câu hỏi A trả lời đầu tiên". Bảng phân phối xác suất của X là

X	0	100	300
$P(X = x_i)$	$0,2$	$0,32$	$0,48$

  và $E(X) = 0 \times 0,2 + 100 \times 0,32 + 300 \times 0,48 = 176$ USD.

- Gọi Y là "số tiền thưởng nhận được khi người chơi chọn câu hỏi B trả lời đầu tiên". Bảng phân phối xác suất của Y là

Y	0	200	300
$P(Y = y_i)$	$0,4$	$0,12$	$0,48$

  và $E(Y) = 0 \times 0,4 + 200 \times 0,12 + 300 \times 0,48 = 168$ USD.

- Vậy nên chọn câu hỏi A trả lời đầu tiên để có khả năng nhận thưởng cao hơn.

Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên

Định lý 2

Cho X là một biến ngẫu nhiên và $g(.)$ là hàm một biến thực.

(a) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận một số hữu hạn giá trị khác nhau với bảng phân phối xác suất (1), thì

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)p_i. \tag{11}$$

(b) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận một số đếm được giá trị với bảng phân phối xác suất (2), thì

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i, \tag{12}$$

nếu chuỗi vế phải hội tụ.

Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên

Định lý 2 (tiếp theo)

(c) Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ và g là hàm số liên tục, thì

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx, \tag{13}$$

nếu tích phân vế phải hội tụ.

✍ Khi cần tìm $E[g(X)]$ đối với biến ngẫu nhiên liên tục, thì việc tính $E[g(X)]$ trực tiếp bằng cách sử dụng Định lý 2 sẽ dễ dàng hơn việc tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $Y = g(X)$ rồi sau đó sử dụng định nghĩa của kỳ vọng.

Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên

Ví dụ 20

(a) Trong Ví dụ 5, X là số bít bị lỗi trong bốn bít được truyền đi, theo **(11)**, kỳ vọng của bình phương số bít bị lỗi là

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,6561 + 1^2 \times 0,2916 + 2^2 \times 0,0486 + 3^2 \times 0,0036 + 4^2 \times 0,0001 = 0,52.$$

(b) Trong Ví dụ 14, X là cường độ dòng điện được đo bằng miliamp, theo **(13)**, giá trị kỳ vọng của cường độ dòng điện bình phương là

$$E(X^2) = \int_0^{20} x^2 f_X(x)dx = \int_0^{20} 0,05x^2 dx = 133,3333.$$

Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên

Ví dụ 21

Sử dụng Định lý 2, tính kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $g(X) = 6X + 2$ với X là biến ngẫu nhiên trong Ví dụ 7.

Giải. Sử dụng (11) và kết quả của Ví dụ 7,

$$E[g(X)] = E(6X+2) = (6\times 0+2)\times\frac{115}{203} + (6\times 1+2)\times\frac{75}{203} + (6\times 2+2)\times\frac{25}{406} + (6\times 3+2)\times\frac{1}{406} = \frac{2030}{406} = 5.$$

Tính chất của kỳ vọng

Tính chất 3 (Tính chất tuyến tính)

Nếu a và b là các hằng số thì

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Hệ quả 1

Nếu c là một hằng số thì

(a) $E(c) = c.$

(b) $E(cX) = cE(X).$

Tính chất 4 (Tính chất cộng tính)

Cho X là một biến ngẫu nhiên, $h(x)$ và $g(x)$ là các hàm nhận giá trị thực. Khi đó,

$$E[g(X) \pm h(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)]. \tag{14}$$

Tính chất của kỳ vọng

Ví dụ 22

Sử dụng Tính chất 3, tính kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $g(X) = 6X + 2$ với X là biến ngẫu nhiên trong Ví dụ 8.

Giải. Sử dụng (8),

$$E(X) = 0 \times \frac{115}{203} + 1 \times \frac{75}{203} + 2 \times \frac{25}{406} + 3 \times \frac{1}{406} = 0,5.$$

Sử dụng Tính chất 3,

$$E(6X + 2) = 6E(X) + 2 = 6 \times 0,5 + 2 = 5.$$

Kết quả này tương tự như kết quả đã tính trong Ví dụ 21.

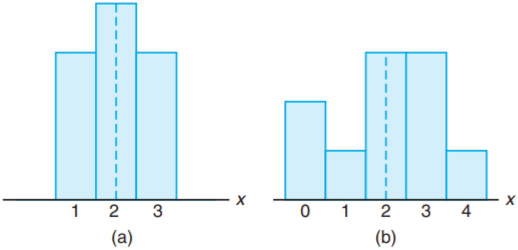
2.3. KỲ VỌNG, PHƯƠNG SAI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

1. 2.3.1 Kỳ vọng
   - 2.3.1.1 Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên
   - 2.3.1.2 Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
   - 2.3.1.3 Tính chất của kỳ vọng
2. **2.3.2 Phương sai. Độ lệch chuẩn**
   - 2.3.2.1 Phương sai của biến ngẫu nhiên
   - 2.3.2.2 Phương sai của hàm của một biến ngẫu nhiên
   - 2.3.2.3 Tính chất của phương sai
   - 2.3.2.4 Độ lệch chuẩn
3. 2.3.3 Mốt. Trung vị
   - 2.3.3.1 Mốt
   - 2.3.3.2 Trung vị
4. Bài tập Mục 2.3

Phương sai của biến ngẫu nhiên

✍

- Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên X phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.
- Tuy nhiên, kỳ vọng không đưa ra một mô tả đầy đủ về hình dạng của phân phối. Trong Hình 8, ta có biểu đồ của hai phân phối xác suất rời rạc có cùng kỳ vọng, $\mu = 2$, nhưng khác nhau đáng kể về độ phân tán của các quan sát của chúng so với giá trị trung bình. Cụ thể, phân phối ở hình (b) phân tán xung quanh giá trị trung bình mạnh hơn so với phân phối ở hình (a). Do đó, cần xác định mức độ phân tán của các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình của nó.



Hình 8: Phân phối rời rạc với kỳ vọng bằng nhau nhưng độ phân tán khác nhau

Phương sai của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 6

Cho X là một biến ngẫu nhiên có kỳ vọng là $E(X)$. Phương sai của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là $V(X)$ hoặc σ_X^2, hoặc đơn giản là σ^2, được định nghĩa như sau:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2. \tag{15}$$

✍Vì $X - E(X)$ là một hàm của biến ngẫu nhiên X, nên từ Định nghĩa 6 và Định lý 2 ta nhận được các công thức sau đây:

(a) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận một số hữu hạn các giá trị khác nhau với bảng phân phối xác suất (1), thì

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^2 p_i. \tag{16}$$

Phương sai của biến ngẫu nhiên

(b) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận một số đếm được giá trị với bảng phân phối xác suất (2), thì

$$V(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[x_n - E(X)\right]^2 p_n \tag{17}$$

nếu chuỗi vế phải hội tụ.

(c) Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất $f_X(x), x \in \mathbb{R}$, thì

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - E(X)\right]^2 f_X(x)dx \tag{18}$$

nếu tích phân vế phải hội tụ.

Phương sai của biến ngẫu nhiên

Định lý 3

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{19}$$

Hệ quả 2

(a) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất (1), thì

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2. \tag{20}$$

(b) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất (2), thì

$$V(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 p_n - \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n\right)^2 \tag{21}$$

nếu các chuỗi vế phải hội tụ.

Phương sai của biến ngẫu nhiên

Hệ quả 2 (tiếp theo)

(c) Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất $f_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ thì

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \right)^2 \tag{22}$$

nếu các tích phân vế phải hội tụ.

✍

- Phương sai của mọi biến ngẫu nhiên luôn không âm.
- Phương sai càng lớn thì độ phân tán các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình của nó càng lớn.
- Khi phương sai bằng 0 thì biến ngẫu nhiên nhận giá trị hằng.

Phương sai của biến ngẫu nhiên

Ví dụ 23

(a) Tính phương sai của biến ngẫu nhiên X chỉ số bít bị lỗi trong 4 bít được truyền đi trong Ví dụ 5.

- Theo (16), sử dụng kết quả của Ví dụ 18(a), phương sai của biến ngẫu nhiên X là

$$V(X) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - 0,4)^2 p_i = 0,36.$$

- Nếu sử dụng (20) và kết quả của các Ví dụ 18(a), 20(a) thì

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0,52 - (0,4)^2 = 0,36.$$

Phương sai của biến ngẫu nhiên

Ví dụ 23 (tiếp theo)

(b) Tính kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X chỉ số đo cường độ dòng điện trong Ví dụ 14.

- Theo (18) và sử dụng kết quả của Ví dụ 18(b), phương sai của biến ngẫu nhiên X là

$$V(X) = \int_0^{20} (x-10)^2 f_X(x)dx = \int_0^{20} 0,05(x-10)^2 dx = 33,3333.$$

- Nếu sử dụng (22) và kết quả của các Ví dụ 18(b), 20(b),

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 133,3333 - (10)^2 = 33,3333.$$

Phương sai của biến ngẫu nhiên

✍

- Phương sai của biến ngẫu nhiên chính là trung bình (có trọng số) của bình phương các độ lệch giữa các giá trị có thể có của nó so với giá trị trung bình. Nó phản ánh mức độ phân tán của các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung tâm của nó là kỳ vọng.
- Trong kỹ thuật phương sai đặc trưng cho mức độ phân tán của các chi tiết gia công hay sai số của thiết bị. Trong quản lý và kinh doanh thì phương sai đặc trưng cho mức độ rủi ro của các quyết định và thay cho "phương sai" người ta thường dùng thuật ngữ "độ biến động". Như vậy, phương sai càng nhỏ thì chi tiết máy có độ chính xác càng cao, phương án đầu tư có độ rủi ro càng thấp.

Ví dụ 24

Cho X_A, X_B lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ số lượng ô tô được sử dụng cho mục đích kinh doanh chính thức trong mỗi ngày làm việc của công ty A và B. Phân phối xác suất của X_A và X_B (Hình 8) tương ứng là

X_A	1	2	3
$P(X_A)$	0,3	0,4	0,3

X_B	0	1	2	3	4
$P(X_B)$	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

Cho nhận xét về phương sai của X_A và X_B.

Phương sai của biến ngẫu nhiên

Giải.

- Từ số liệu phân phối xác suất của các biến ngẫu nhiên X_A và X_B ta tính được

$$E(X_A) = 1 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,3 = 2,0,$$
$$E(X_B) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,3 + 4 \times 0,1 = 2,0$$

và

$$V(X_A) = (1-2)^2 \times 0,3 + (2-2)^2 \times 0,4 + (3-2)^2 \times 0,3 = 0,6,$$
$$V(X_B) = (0-2)^2 \times 0,2 + (1-2)^2 \times 0,1 + (2-2)^2 \times 0,3 + (3-2)^2 \times 0,3 + (4-2)^2 \times 0,1 = 1,6.$$

- Suy ra $V(X_A) = 0,6 < 1,6 = V(X_B)$.
- Các phương sai này thể hiện mức độ phân tán của các giá trị của biến ngẫu nhiên X_A và X_B xung quanh giá trị trung bình của chúng $E(X_A) = E(X_B) = 2,0$ (Hình 8(a) và Hình 8(b)).

Phương sai của biến ngẫu nhiên

Ví dụ 25

Theo thống kê việc một người Mỹ 25 tuổi sẽ sống thêm trên một năm có xác suất là 0,992, còn xác suất để người đó chết trong vòng một năm tới là 0,008. Một chương trình bảo hiểm đề nghị người đó bảo hiểm sinh mạng cho một năm với số tiền chi trả 1000 USD, còn tiền đóng là 10 USD. Hỏi lợi nhuận trung bình của công ty bảo hiểm nhận được và phương sai của lợi nhuận là bao nhiêu? Cho nhận xét?

Giải.

- Gọi X là lợi nhuận của công ty bảo hiểm nhận được, X là biến ngẫu nhiên rời rạc và $S_X = \{-990, 10\}$. Bảng phân phối xác suất của X là

X	-990	10
$P(X = x_i)$	0,008	0,992

- Suy ra
$$E(X) = -990 \times 0,008 + 10 \times 0,992 = 2 \text{ USD}.$$
Ta thấy lợi nhuận trung bình bằng 2 USD (một số dương) vì vậy công ty bảo hiểm có thể làm ăn có lãi.

Phương sai của biến ngẫu nhiên

- Vì
$$E(X^2) = (-990)^2 \times 0,008 + (10)^2 \times 0,992 = 7940.$$
Suy ra
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 7940 - 4 = 7936.$$
- Điều này nói lên rằng mặc dù kinh doanh bảo hiểm có lãi nhưng rủi ro khá lớn.

Phương sai của hàm của một biến ngẫu nhiên

Định lý 4

Cho X là một biến ngẫu nhiên và $g(.)$ là hàm số một biến thực.

(a) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất (1), thì

$$V[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} \left\{ g(x_i) - E[g(X)] \right\}^2 p_i. \tag{23}$$

(b) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất (2), thì

$$V[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ g(x_i) - E[g(X)] \right\}^2 p_i \tag{24}$$

nếu chuỗi vế phải hội tụ.

Phương sai của hàm của một biến ngẫu nhiên

Định lý 4 (tiếp theo)

(c) Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất $f_X(x), x \in \mathbb{R}$ và g là hàm số liên tục, thì

$$V[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \{g(x) - E[g(X)]\}^2 f_X(x)dx \tag{25}$$

nếu tích phân vế phải hội tụ.

Tính chất của phương sai

Tính chất 5

Nếu a và b là các hằng số thì
$$V(aX+b) = a^2V(X).$$

Hệ quả 3

Nếu c là một hằng số thì

(a) $V(cX) = c^2V(X)$.

(b) $V(c) = 0$.

Độ lệch chuẩn

Định nghĩa 7

Độ lệch chuẩn (standard deviation) của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là σ_X, được định nghĩa như sau:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}. \tag{26}$$

✍ Khi cần đánh giá mức độ phân tán của biến ngẫu nhiên theo đơn vị đo của nó người ta dùng độ lệch chuẩn vì độ lệch chuẩn có cùng đơn vị đo với đơn vị đo của biến ngẫu nhiên.

Ví dụ 26

Theo (26),

(a) Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X trong Ví dụ 5 là $\sigma_X = \sqrt{0,36} = 0,6$.

(b) Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X trong Ví dụ 14 là $\sigma_X = \sqrt{33,3333} \approx 5,7735$.

2.3. KỲ VỌNG, PHƯƠNG SAI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

1. 2.3.1 Kỳ vọng
   - 2.3.1.1 Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên
   - 2.3.1.2 Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
   - 2.3.1.3 Tính chất của kỳ vọng
2. 2.3.2 Phương sai. Độ lệch chuẩn
   - 2.3.2.1 Phương sai của biến ngẫu nhiên
   - 2.3.2.2 Phương sai của hàm của một biến ngẫu nhiên
   - 2.3.2.3 Tính chất của phương sai
   - 2.3.2.4 Độ lệch chuẩn
3. **2.3.3 Mốt. Trung vị**
   - 2.3.3.1 Mốt
   - 2.3.3.2 Trung vị
4. Bài tập Mục 2.3

Mốt

Định nghĩa 8

(a) Mốt là giá trị của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là $\mathrm{mod}(X)$, mà tại đó hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ đạt cực đại (địa phương).

(b) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc, thì $\mathrm{mod}(X)$ là giá trị tại đó xác suất để $X = \mathrm{mod}(X)$ là lớn nhất.

Ví dụ 27

Cho phân phối xác suất của X là

X	-1	0	1
$P(X = x_i)$	$1/6$	$2/3$	$1/6$

Ta có, $\mathrm{mod}(X) = 0$.

Trung vị

Định nghĩa 9

Trung vị của biến ngẫu nhiên X là giá trị của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là $\text{med}(X)$, mà tại đó $F_X(x) = 1/2$, nghĩa là

$$F_X(\text{med}(X)) = \frac{1}{2}. \tag{27}$$

Định nghĩa 10

Phân vị mức α là giá trị của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là x_α, sao cho

$$F_X(x_\alpha) = \alpha. \tag{28}$$

Trung vị

Ví dụ 28

Cho hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}x(2-x), & 0 \le x \le 2, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

Tìm $\text{mod}(X)$ và $\text{med}(X)$.

Giải.

- Hàm phân phối xác suất của X là

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{3}{4}\left(x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right), & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Trung vị

- med(X) là nghiệm của phương trình $F_X(x) = \dfrac{1}{2}$. Hay $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ với $0 < x \leq 2$. Suy ra med$(X) = 1$.
- Hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ có

$$f'_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \dfrac{3}{2}(1-x), & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{nếu trái lại}, \end{cases}$$

đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = 1$, do đó đạt cực đại tại điểm này, nên mod$(X) = 1$.

2.3. KỲ VỌNG, PHƯƠNG SAI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

1. 2.3.1 Kỳ vọng
   - 2.3.1.1 Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên
   - 2.3.1.2 Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
   - 2.3.1.3 Tính chất của kỳ vọng
2. 2.3.2 Phương sai. Độ lệch chuẩn
   - 2.3.2.1 Phương sai của biến ngẫu nhiên
   - 2.3.2.2 Phương sai của hàm của một biến ngẫu nhiên
   - 2.3.2.3 Tính chất của phương sai
   - 2.3.2.4 Độ lệch chuẩn
3. 2.3.3 Mốt. Trung vị
   - 2.3.3.1 Mốt
   - 2.3.3.2 Trung vị
4. **Bài tập Mục 2.3**

Bài tập

Bài 14

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,41	0,37	k	0,05	0,01

(a) Xác định k.

(b) Tính $E(X)$, $V(X)$ và σ_X.

Bài tập

SAMI 1956

Bài 15

Ký hiệu X là số máy tính cần mua mỗi năm để thay thế máy tính cũ bị hỏng của một công ty. Bảng phân phối xác suất của X được xác định như sau:

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Giả sử chi phí mua một chiếc máy tính là 1200 đô la và công ty được nhận số tiền chiết khấu là $50X^2$ đô la. Xác định số tiền trung bình công ty bỏ ra để mua máy tính mỗi năm.

Bài tập

Bài 16

Thời gian nằm viện sau phẫu thuật (ngày) của bệnh nhân tại một bệnh viện là biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{32}{(x+4)^3}, & x > 4, \\ 0, & x \leq 4. \end{cases}$$

Tính thời gian nằm viện trung bình của bệnh nhân sau phẫu thuật tại bệnh viện đó.

Bài 17

Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X xác định bởi:

$$f_X(x) = \begin{cases} A + Bx^2, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Tìm A và B biết rằng $E(X) = 1/4$.